

CAPITULO 4 EL ESTADO LÍMITE ÚLTIMO EN LAS ESTRUCTURAS METÁLICAS ESBELTAS

- 4.1- Introducción
- 4.2- Factores que influyen en la resistencia última de las estructuras metálicas.
 - 4.2.1 No-linealidades mecánicas.
 - 4.2.2 No-linealidades geométricas.
 - 4.2.3 Imperfecciones geométricas
 - 4.2.4 Tensiones residuales
- 4.3- Algoritmos de cálculo para resolver problemas no-lineales
 - 4.3.1 Métodos incrementales no-iterativos
 - 4.3.2 Método de Picard
 - 4.3.3 Métodos incrementales iterativos.
- 4.4- No-linealidad geométrica con grandes giros y pequeñas deformaciones en estructuras de barras y elementos superficiales planos.
 - 4.4.1 No-linealidad geométrica con grandes giros y pequeñas deformaciones en estructuras de barras.
 - 4.4.2 No-linealidad geométrica con grandes giros y pequeñas deformaciones en estructuras formadas por elementos superficiales planos.
- 4.5- No-linealidad mecánica de estructuras de barras y elementos superficiales planos.
 - 4.5.1- No-linealidad mecánica en estructuras de barras.
 - 4.5.2 No-linealidad mecánica en estructuras formadas por elementos superficiales planos.
- 4.6- Programas y ejemplos.
 - 4.6.1 Programa COROT
 - 4.6.2 Ejemplos

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analiza el estado límite último de estructuras metálicas esbeltas que colapsan por fenómenos de inestabilidad global o local. El análisis se centra en la barra aislada, los entramados de barras y los sistemas estructurales formados por elementos superficiales planos.

Se pasa revista a los factores que influyen en la resistencia última de estas estructuras: efectos no lineales geométricos y mecánicos, imperfecciones geométricas, tensiones residuales, etc. También se analizan los diversos métodos de análisis que se han desarrollado hasta la fecha para estudiar estos efectos.

4.2-FACTORES QUE INFLUYEN EN LA RESISTENCIA ÚLTIMA DE LAS ESTRUCTURAS METÁLICAS ESBELTAS

En primer lugar están los factores comunes a todos los sistemas estructurales, entre los que cabe citar la no-linealidad debida al comportamiento del material (*no-linealidad mecánica*) y la no-linealidad debida a los cambios en la geometría de la estructura inducidos por la deformación (*no-linealidad geométrica*).

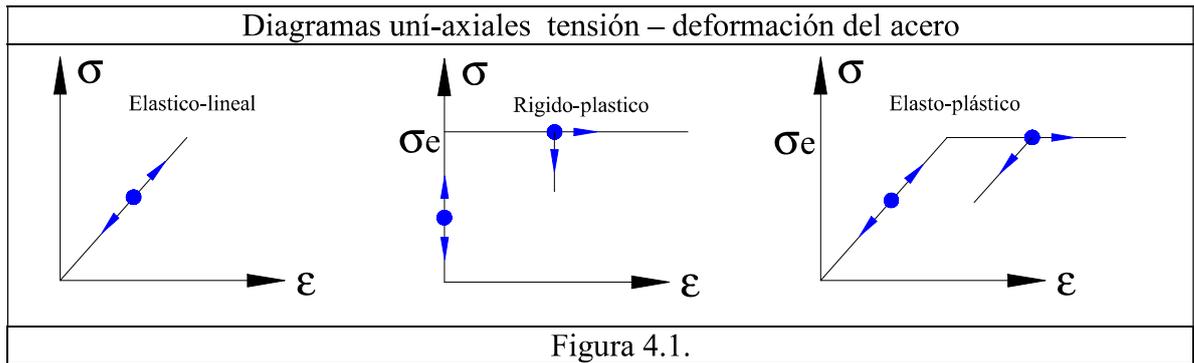
En segundo lugar hay otros factores específicos de las estructuras metálicas, como son el comportamiento elasto-plástico del acero, la existencia de *tensiones residuales* internas debidas a los procesos de fabricación (laminación, soldadura, etc.), las posibles variaciones de los parámetros del material a lo largo de la sección y las *imperfecciones geométricas* toleradas en la construcción y el montaje.

Por último, las condiciones de contorno y la sollicitación también pueden ser otra fuente de no-linealidad, que no se considera en esta tesis.

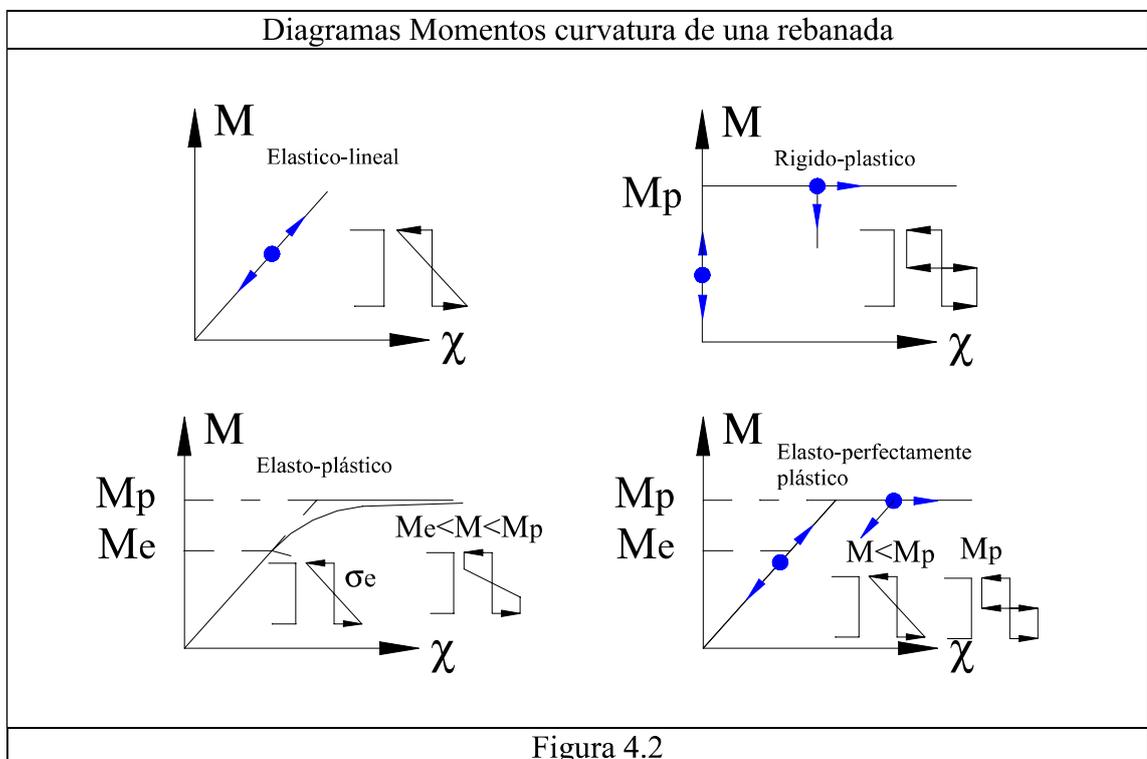
4.2.1 NO-LINEALIDADES MECÁNICAS

Las ecuaciones constitutivas relacionan las tensiones con las deformaciones y dependen del tipo de material. El acero de construcción, sollicitado por tensiones de comparación σ_{co} inferiores a su límite elástico, tiene un comportamiento elástico y lineal. Si la tensión de comparación alcanza el límite elástico, el material pasa a comportarse de forma elasto-plástica. Su respuesta queda determinada por el criterio de plastificación adoptado y la regla de flujo, que determina la dirección de las deformaciones plásticas. También se puede definir una regla de endurecimiento, ya sea isótropo, cinemático o mixto.

En piezas prismáticas se suele simplificar el comportamiento elasto-plástico del acero, aceptando que la plastificación se asocia sólo a las tensiones longitudinales σ . En la figura 4.1 se representa el comportamiento simplificado uniaxial del acero con los diagramas tensión - deformación para el caso elástico-lineal, rígido-plástico y elasto-plástico sin endurecimiento. El modelo rígido-plástico, desprecia las deformaciones elásticas frente a las plásticas, lo que permite utilizar métodos de cálculo simplificados para estimar las llamadas cargas de rotura rígido-plásticas.



En la figura 4.2 se representan los diagramas momento-curvatura de una rebanada solicitada a flexión, suponiendo diversos comportamientos del material. El modelo elástico-perfectamente plástico supone admitir comportamiento lineal del material hasta que se alcanza el momento de plastificación de la sección M_p y se forma una rótula plástica.



4.2.2 NO-LINEALIDADES GEOMÉTRICAS

Las ecuaciones cinemáticas relacionan los desplazamientos de los puntos de la estructura con las deformaciones. La no-linealidad de estas ecuaciones es consecuencia de la descripción matemática de la deformación del sólido. Para que estas relaciones puedan linealizarse, los movimientos experimentados por el sólido al deformarse deben ser muy pequeños (en rigor, infinitesimales).

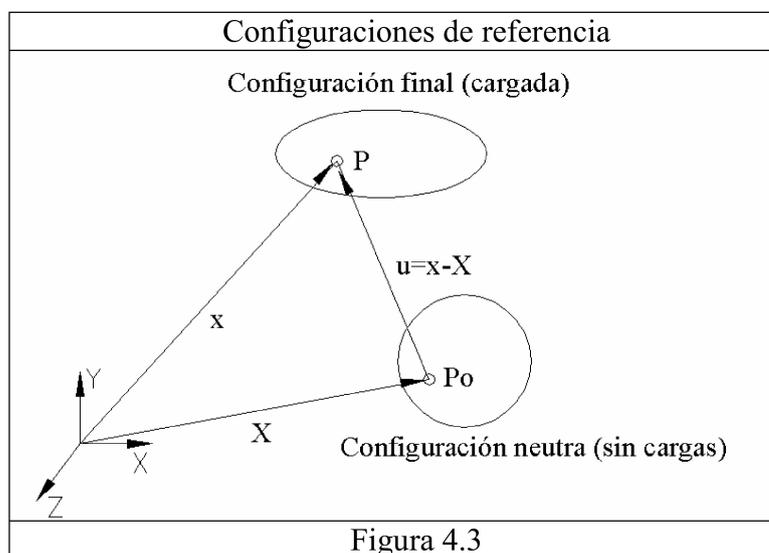
Las ecuaciones de equilibrio, relacionan las cargas aplicadas con las tensiones o los esfuerzos soportados por la estructura. La no-linealidad de estas ecuaciones se debe a que el equilibrio para

unas cargas dadas *se alcanza en la posición deformada*, ligera o notablemente distinta de la situación neutra sin cargas, en la que suele basarse la definición de la geometría de la estructura. Este último efecto es de gran importancia en las estructuras metálicas, ya que la alta relación entre la resistencia y el peso del acero conduce a estructuras muy esbeltas y, por consiguiente, muy deformables.

Tres son las descripciones cinemáticas que se suelen emplear en la mecánica de los sólidos deformables para formular las ecuaciones cinemáticas y las ecuaciones de equilibrio: La “lagrangiana total” (LT), la “lagrangiana actualizada” (LA) y la “co-rotacional” (CR) o intrínseca. Se distinguen por la configuración de referencia que emplean. Otras dos descripciones son la euleriana y la ALE (arbitrary lagrangian eulerian ó “euleriana-lagrangiana”), preferidas en hidráulica, pero poco empleadas para sólidos deformables.

La diferencia fundamental entre las mallas lagrangianas y las eulerianas es que en las primeras las coordenadas de los nodos se desplazan al hacerlo las partículas materiales, mientras que en las segundas, las coordenadas de los nodos permanecen fijas coincidiendo con las coordenadas espaciales, actualmente se están empleando también métodos sin definir una malla “Meshless” (ver Belytschov 1994).

En la figura 4.3 se representa la configuración neutra (sin cargas) de un sólido, definida por las coordenadas X y la configuración final (cargada) del mismo sólido, definida por las coordenadas x . Las cargas han producido unos desplazamientos $u = x - X$. El problema así formulado utiliza una descripción “lagrangiana total”, ya que los movimientos u se refieren a la geometría neutra (sin cargas).

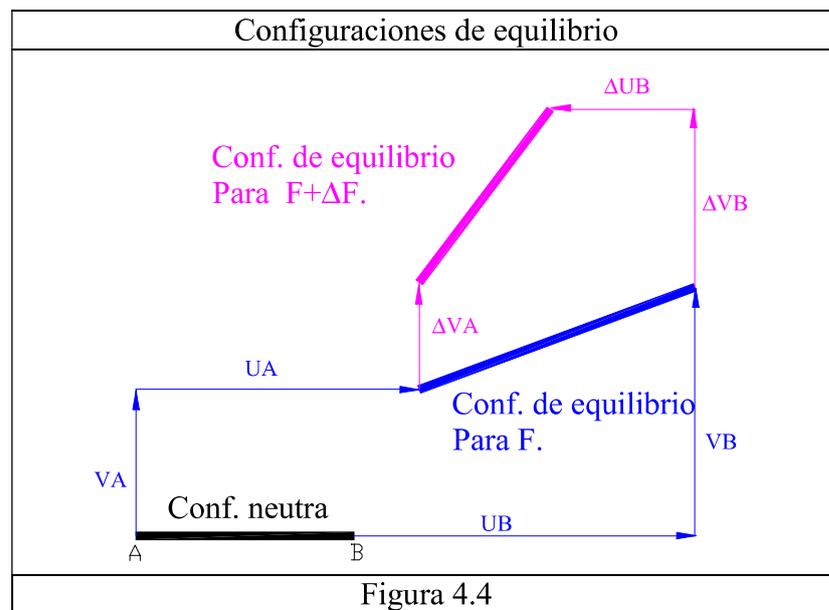


Normalmente, la formulación LT se simplifica, admitiendo que, como los materiales estructurales son poco deformables, las deformaciones son pequeñas frente a la unidad (teoría de pequeñas deformaciones).

En la figura 4.4 se representa la configuración neutra (sin cargas) de un sólido definida por las coordenadas X , la configuración de equilibrio correspondiente a unas cargas F y la configuración de equilibrio correspondiente a unas cargas $F + \Delta F$. El incremento de cargas ΔF provoca un incremento de desplazamientos $(\Delta u, \Delta v)$. El problema así formulado utiliza una descripción “lagrangiana actualizada”, acompañada de un proceso incremental: La última configuración de

equilibrio alcanzada en el análisis, es la que se utiliza como configuración de referencia para definir el incremento de movimientos (Δu , Δv), asociado al nuevo incremento de las cargas ΔF .

La ventaja que se obtiene con la formulación “lagrangiana actualizada”, frente a la formulación “lagrangiana total” es que, al subdividir el proceso de análisis en saltos pequeños, en el análisis correspondiente a cada salto, se pueden incluir simplificaciones derivadas del hecho de que el movimiento asociado al salto es pequeño, o al menos, que los giros asociados al salto son moderados (teoría de pequeñas deformaciones y giros moderados).

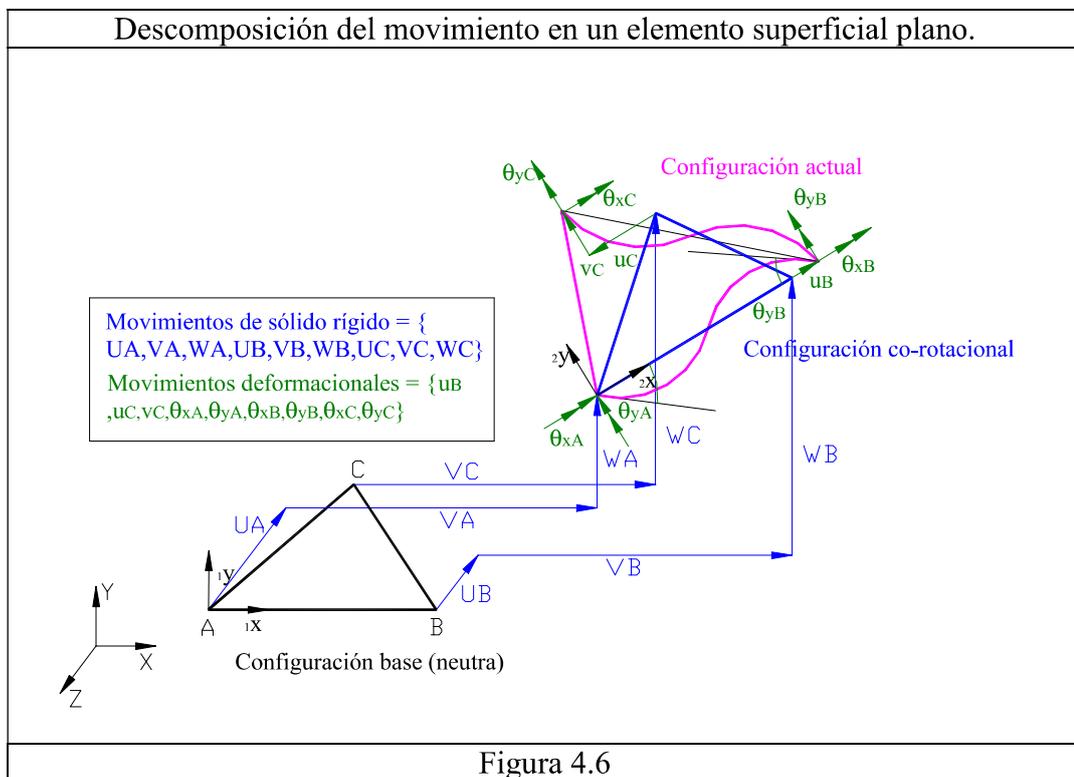
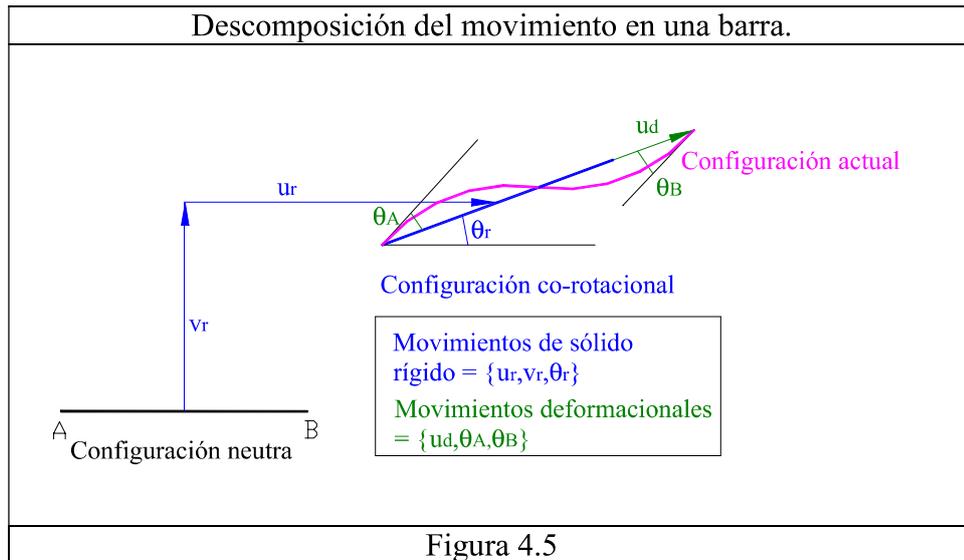


La formulación “co-rotacional” es la más reciente de las tres. Su principal campo de aplicación se encuentra en los problemas que más nos interesan, con grandes giros y pequeñas deformaciones. Se empezó a desarrollar en 1980 y tiene sus raíces en la vieja idea de descomponer el movimiento total, en un movimiento de sólido rígido y en un movimiento asociado exclusivamente a las deformaciones. Utiliza dos configuraciones de referencia:

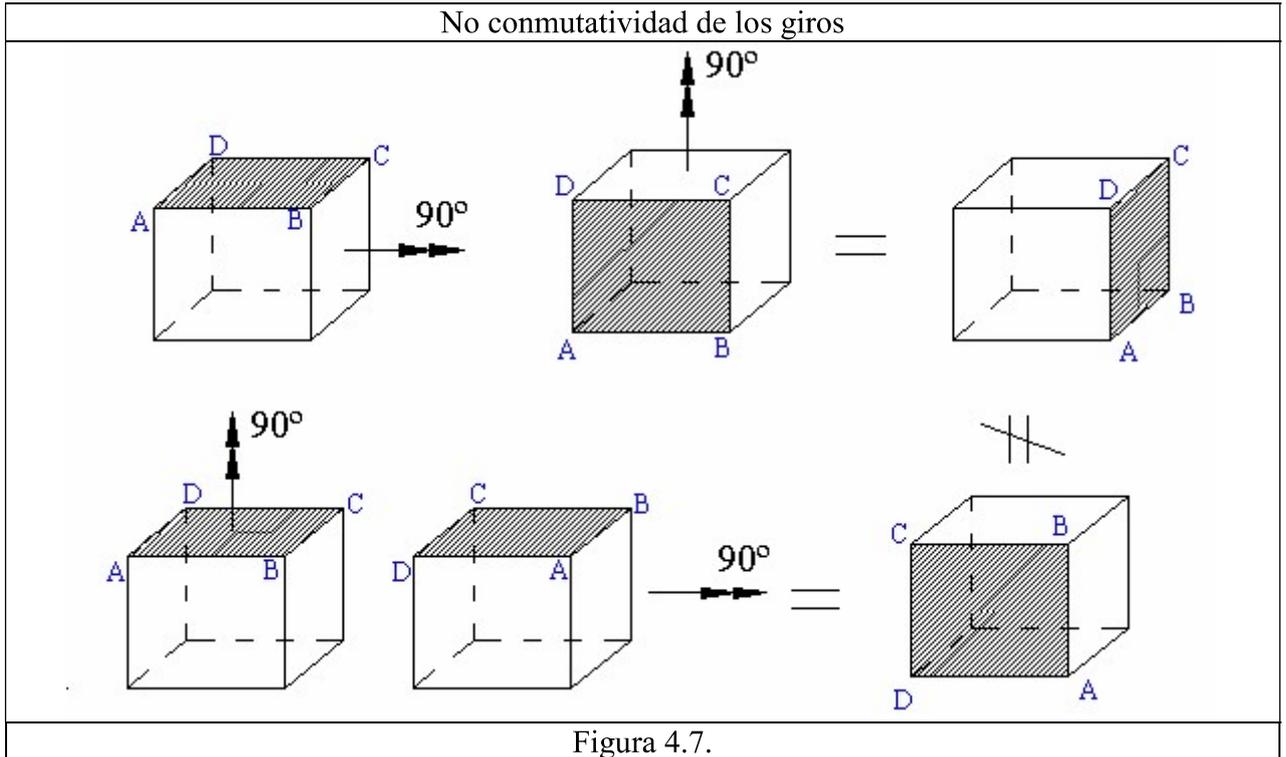
A. La configuración *neutra* (*sin cargas*), que se mantiene fija durante el análisis y a la que se refiere el movimiento de sólido rígido.

B. La configuración *co-rotacional*, que se obtiene, para cada elemento, a través de un movimiento de sólido rígido de la configuración neutra. La deformación del elemento, se mide con respecto a la configuración co-rotacional y se admite que los movimientos referidos a dicha configuración son muy pequeños, lo que autoriza a utilizar la cinemática lineal. Cuando estas hipótesis no se cumplen en algún elemento, se divide el elemento en más elementos. Esta formulación presenta la ventaja de desacoplar las no-linealidades mecánicas de las no-linealidades geométricas. Las no-linealidades mecánicas se incorporan al análisis al considerar el comportamiento con respecto a los ejes co-rotacionales, y las no-linealidades geométricas se incorporan al análisis al considerar el cambio de ejes desde la configuración neutra a la co-rotacional.

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestra un esquema de la descomposición del movimiento total en la formulación co-rotacional para una barra y un elemento superficial plano.

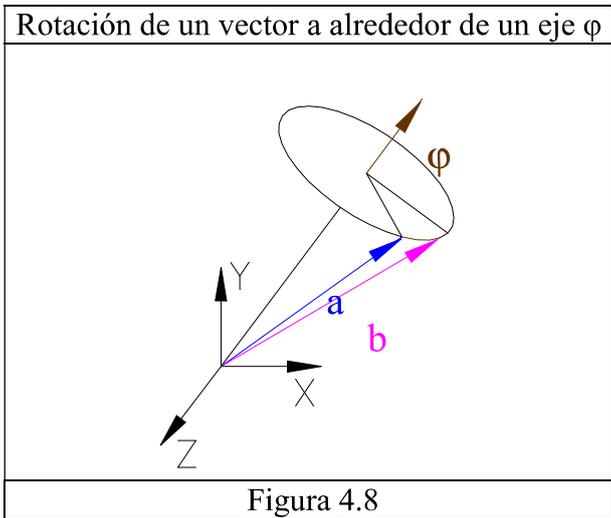


Un aspecto que condiciona la complejidad del análisis geométrico es la magnitud de los giros experimentados por el sólido en su deformación. Los giros finitos no son aditivos ni conmutativos, tal como se puede apreciar en la figura 4.7.



Así, al girar un vector $\{a\}$, con respecto a un eje $\{\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)\}$, una magnitud $\{\varphi\} \varphi = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$, se obtiene un vector $\{b\}$, que viene dado por (ver Rodrigues (1840)):

$$\{b\} = \left[[I] + \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} [W] + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\varphi/2} \right)^2 \cdot [W]^2 \right] \{a\} = e^{[W]} \{a\} \dots\dots\dots(4.1)$$



donde las matrices que nos definen este giro vienen dadas por:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.2)$$

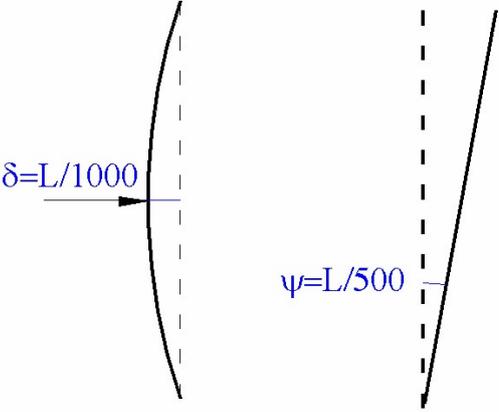
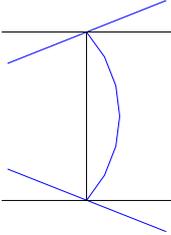
$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.3)$$

$$[W]^2 = \begin{bmatrix} -(\varphi_y^2 + \varphi_z^2) & \varphi_x \cdot \varphi_y & \varphi_x \cdot \varphi_z \\ \varphi_x \cdot \varphi_y & -(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) & \varphi_y \cdot \varphi_z \\ \varphi_x \cdot \varphi_z & \varphi_y \cdot \varphi_z & -(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.4)$$

Para rotaciones moderadas, se puede admitir la aproximación $\sin(\varphi) \approx \varphi$ y $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{\varphi}{2}$, que conduce a $\{b\} = \left([I] + [W] + \frac{1}{2}[W]^2 \right) \{a\}$. El último término es el que marca la diferencia entre la teoría de pequeñas rotaciones (se desprecia) y la teoría de rotaciones moderadas (se considera).

4.2.3 IMPERFECCIONES GEOMÉTRICAS

En cuanto a las imperfecciones geométricas de los sistemas estructurales, se puede distinguir entre desplomes, combaduras e imperfecciones locales, ver figura 4.9. Su determinación requiere de estudios estadísticos. Normalmente, las normas establecen las tolerancias de fabricación y montaje, es decir, las imperfecciones máximas admisibles en una estructura bien ejecutada.

Combadura y desplome de una barra	Imperfección geométrica local
	
<p>Figura 4.9</p>	

4.2.4 TENSIONES RESIDUALES

Las estructuras metálicas laminadas o armadas por soldadura presentan, debido a su proceso de fabricación, tensiones residuales internas cuyo origen radica en la variación del límite elástico del acero con la temperatura: al aumentar la temperatura el límite elástico del acero baja, llegando a ser casi nulo a la temperatura de 900°C.

En los perfiles laminados en caliente, después de la laminación, el enfriamiento de las zonas que presentan mayor concentración de masa es más lento que el de las zonas con mucho perímetro y poca masa, de manera que, cuando algunas partes ya se han enfriado, otras permanecen calientes. Cuando las últimas tienden a contraerse por enfriamiento, las que ya están frías, coartan esta deformación y se originan unas tensiones internas longitudinales auto-equilibradas, que permanecen en el perfil. Pueden ser del orden del 30 al 60% del límite elástico del acero, según la forma del perfil, ver figura 4.10.

En las piezas armadas soldadas, independientemente de las posibles tensiones residuales de las chapas base, la soldadura supone el contacto de material fundido con metal sólido y a temperatura ambiente (o mucho inferior en cualquier caso). El enfriamiento del cordón provoca unas tensiones auto-equilibradas en la sección, con valores máximos en los puntos o líneas de soldadura del orden del 100% del límite elástico, ver figura 4.10.

Por ser tensiones auto-equilibradas, no suponen disminución de la resistencia última de las secciones del perfil, pero conducen a la plastificación adelantada de determinadas zonas de la sección y la plastificación atrasada de otras zonas, lo cual se traduce, a partir de un cierto nivel de sollicitación, en un aumento de la deformabilidad media de la sección real con respecto a la hipótesis de que no existen tensiones residuales.

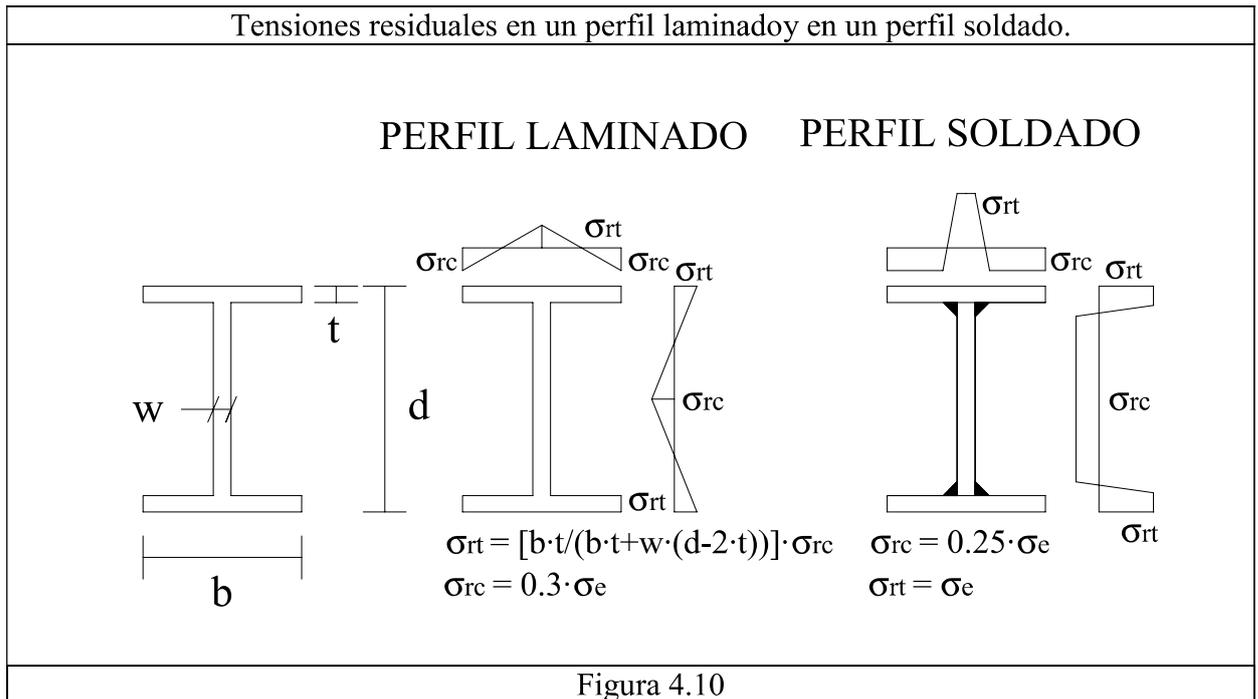


Figura 4.10

4.3- ALGORITMOS DE CÁLCULO PARA RESOLVER PROBLEMAS NO-LINEALES

Las ecuaciones cinemáticas, de equilibrio y constitutivas de todas las partes integrantes de una estructura con sus condiciones de contorno, en general, conducen a un gran sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (por razones geométricas y mecánicas). El sistema es tanto mayor cuanto mayor sea la estructura, o para un tamaño dado de ella, cuanto más precisa se desee la representación.

Dada una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales con sus condiciones de contorno, dos son los caminos para abordar su resolución: a) Recurrir a la integración directa, b) Buscar una solución aproximada empleando algoritmos de cálculo numérico.

La primera opción es inviable cuando, en una estructura, se pretenden considerar de forma simultánea los efectos no-lineales mecánicos y geométricos, por lo que nos vemos obligados a utilizar métodos de discretización que transforman el medio continuo en un sistema discreto. Las opciones son las diferencias finitas y los elementos finitos que se pueden complementar con el uso de diagramas momento-curvatura y momento-axil-curvatura.

Ambos métodos transforman el problema continuo en una aproximación discreta con un número finito de grados de libertad.

El proceso que se sigue, en general, para transformar un problema continuo en uno discreto y, después, en un problema numérico consta de tres fases, esquematizadas en la tabla adjunta. El problema se modeliza mediante un sistema de ecuaciones no-lineales. Para que los resultados numéricos sean fiables, debe comprobarse que se trata de un método estable, convergente y consistente.

Proceso para transformar un problema continuo en uno numérico		
Problema	Operador	Condiciones contorno (C.C.) -Dirichlet, Neumann o Cauchy- Condiciones iniciales (C.I.)
Continuo	$L u = \alpha$	C.C. $\rightarrow M u = \beta$ C.I. $\rightarrow u(0)=\gamma$
Discretizado	$L u + \varepsilon = \alpha$	$M u + \varepsilon^* = \beta$ $u(0)=\gamma$
Numérico	$L U = \alpha$	$M U = \beta$ $U(0)=\gamma$

$\{\varepsilon, \varepsilon^*\}$ son los residuos de la discretización, y Δ hace referencia al paso de la discretización.

Se dice que el método es “estable”, cuando una pequeña diferencia en las condiciones iniciales (γ^*), genera una solución cuya diferencia con la solución inicial está acotada. (Criterio de Lyapunov y Poincare). En problemas dinámicos, puede condicionar el incremento de tiempo entre pasos.

$$\begin{aligned}
 L U &= \alpha ; M U = \beta ; U(0)=\gamma \\
 L V &= \alpha ; M V = \beta ; V(0)=\gamma + \gamma^* \\
 \lim_{\Delta \rightarrow 0} (V-U) &= \text{Esta acotado}
 \end{aligned}$$

Se dice que el método es convergente, cuando se cumple la condición: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (U-u) = 0$, para lo que se hace uso de distintas normas: La máxima diferencia en valor absoluto, la suma de las diferencias en valor absoluto, la norma euclídea o ésta modificada. Las magnitudes a controlar pueden ser los desplazamientos, las fuerzas desequilibradas o el incremento en el trabajo de las fuerzas interiores siempre como magnitudes relativas.

Ejemplos típicos de pérdida de convergencia en el método de los elementos finitos, son el bloqueo de la solución “por cortante” y/o “por membrana”. Los bloqueos se resuelven utilizando integración reducida, o imponiendo un campo de deformaciones para evitar el bloqueo. El problema de bloqueo por cortante, se ha eliminado en esta tesis al utilizar los elementos BPT y CKZ basados en la teoría de Love-Kirchoff .

Se dice que el método es consistente, cuando se cumple la condición: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0$. Cuando no es consistente se pueden perder las propiedades de convergencia. Estudiando el comportamiento elasto-plástico con endurecimiento lineal, se puede pasar de tener una convergencia cuadrática a otra lineal si no se utiliza la matriz de rigidez consistente.

Formulado el método numérico que transforma el problema continuo en uno discreto, debemos abordar la resolución del sistema de ecuaciones no-lineales que obtenemos. Normalmente el problema se plantea en los siguientes términos: Se conoce la geometría neutra de la estructura (sin cargas), las condiciones de contorno y la sollicitación $F = \mu \cdot F_0$ (μ es un parámetro escalar). Se pretende determinar los movimientos de la estructura $X = X$, para diversos valores de μ . Al principio μ se hace crecer, hasta que se alcanza el máximo de la curva carga-movimiento (carga de colapso), y después, si se desea analizar el post-colapso, se hace disminuir.

La relación entre las cargas \mathbf{F} y los movimientos \mathbf{X} son ecuaciones no-lineales $\mathbf{F} = \Psi(\mathbf{X})$, de las que se obtienen los residuos \mathbf{R} o cargas no equilibradas [en una configuración arbitraria \mathbf{X}^i , $\mathbf{R}^i = \mathbf{F} - \Psi(\mathbf{X}^i)$]. Por otra parte, diferenciando la relación $\mathbf{F} = \Psi(\mathbf{X})$, se obtiene una expresión lineal que para una geometría \mathbf{X} , relaciona diferenciales de cargas $d\mathbf{F}$, con diferenciales de movimiento $d\mathbf{X}$, a través de una matriz $[\mathbf{K}]$, que recibe el nombre de rigidez tangente de la estructura para la geometría \mathbf{X} , $d\mathbf{F} = \mathbf{K} d\mathbf{X}$. Esta matriz y las ecuaciones de equilibrio (para calcular residuos), juegan un papel esencial en los algoritmos numéricos que se han desarrollado para resolver numéricamente estos sistemas de ecuaciones no-lineales. A continuación describimos los algoritmos más utilizados. Otros algoritmos se pueden consultar en los libros de Crisfield (1991 y 1997).

4.3.1- MÉTODOS INCREMENTALES NO ITERATIVOS

En el método de Euler las cargas se aumentan por incrementos y los movimientos se obtienen con la rigidez tangente al principio del incremento.

$$K_n \cdot \Delta X = \Delta F_{ext} \rightarrow {}^n\mathbf{X} = {}^{n-1}\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} \dots \dots \dots (4.5)$$

Variantes de este método son los de Runge Kutta de segundo orden, entre los que figuran el de Heun $\{\mu=1, \alpha_1=1/2, \alpha_2=1/2\}$, el de Ralston $\{\mu=0.75, \alpha_1=1/3, \alpha_2=2/3\}$ y el del punto medio $\{\mu=0.5, \alpha_1=0, \alpha_2=1\}$.

$$K_n \cdot \Delta X^1 = \mu \cdot \Delta F_{ext} \rightarrow {}^{n\mu}\mathbf{X} = {}^n\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}^1 \dots \dots \dots (4.6)$$

$$K_n^* \cdot \Delta X = \Delta F_{ext} \rightarrow {}^{n+1}\mathbf{X} = {}^n\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} \dots \dots \dots (4.7)$$

siendo $K_n^* = \alpha_1 \cdot K_n + \alpha_2 \cdot K_{n\mu}$, ΔX es el incremento de desplazamiento, K_n y $K_{n\mu}$ las matrices de rigidez evaluadas en ${}^n\mathbf{X}$ y ${}^{n\mu}\mathbf{X}$.

Los métodos incrementales no iterativos presentan el inconveniente de que, en las configuraciones por las que se va pasando, no se cumplen las ecuaciones de equilibrio, acumulándose un residuo, (ver figura 4.11).

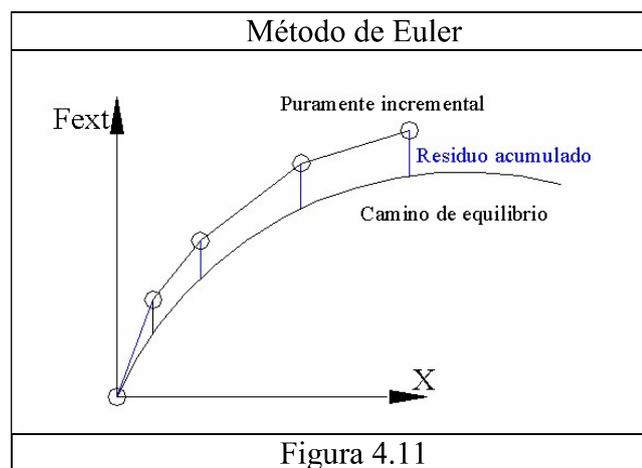


Figura 4.11

4.3.2- MÉTODO DE PICARD

Se parte directamente de las ecuaciones no-lineales, que gobiernan el problema escritas de la forma $[K(X)] \cdot \{X\} = \{F\}$. La matriz $K(X)$, se puede interpretar como una matriz de rigidez secante que se va actualizando iterativamente con cada conjunto de soluciones obtenidas, empezando con unos valores de los movimientos prefijados e iterando hasta que se alcanza la convergencia.

$$\{X^1\} = K(X^0)^{-1} \cdot \{F\} \dots \dots \dots (4.8)$$

$$\{X^2\} = K(X^1)^{-1} \cdot \{F\} \dots \dots \dots (4.9)$$

4.3.3- MÉTODOS INCREMENTALES ITERATIVOS

Las cargas se aumentan por incrementos y los movimientos se obtienen con un proceso iterativo hasta que se anula el residuo.

En el método de Newton-Raphson se calcula el incremento de desplazamientos correspondientes a cada iteración a partir de la matriz de rigidez tangente y el residuo actualizado al principio de la iteración (ver figura 4.12).

En el método de Newton-Raphson modificado se opera, en cada salto de carga, con la rigidez tangente en el origen del incremento, lo que supone un ahorro en el número de operaciones a realizar en problemas de grandes dimensiones. Otros métodos incrementales iterativos son los llamados de Quasi-Newton que persiguen actualizar la matriz de rigidez de la forma más sencilla posible, entre los que se encuentran el Broyden directo e inverso (de rango 1), el DFP (Davidenko, Fletcher y Powell) es directo, y el BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno) es inverso, utilizados en problemas de optimización, además están los Newton secante, entre los que figuran el Broyden secante y BFGS secante.

En los algoritmos que se escriben a continuación se utiliza la siguiente notación:

- i** = Iteración
- n** = Incremento
- ${}^n\Delta\mathbf{X}^1$ = Predicción del vector desplazamientos
- ${}^n\delta\mathbf{X}^i$ = Corrección iterativa del vector desplazamientos
- ${}^n\mathbf{X}^0 = {}^{n-1}\mathbf{X}$ = Vector desplazamientos al principio del incremento
- Fext** = Vector de fuerzas externas
- Fint(X)** = Vector de fuerzas internas
- λ = Nivel de carga.

A continuación se muestran las fases a seguir en el **Newton –Raphson**:

Se descompone la carga exterior en incrementos, de modo que la fuerza exterior total será la aplicada en el incremento anterior más el incremento de carga. ${}^n\mathbf{Fext} = {}^{n-1}\mathbf{Fext} + \Delta\mathbf{Fext}$

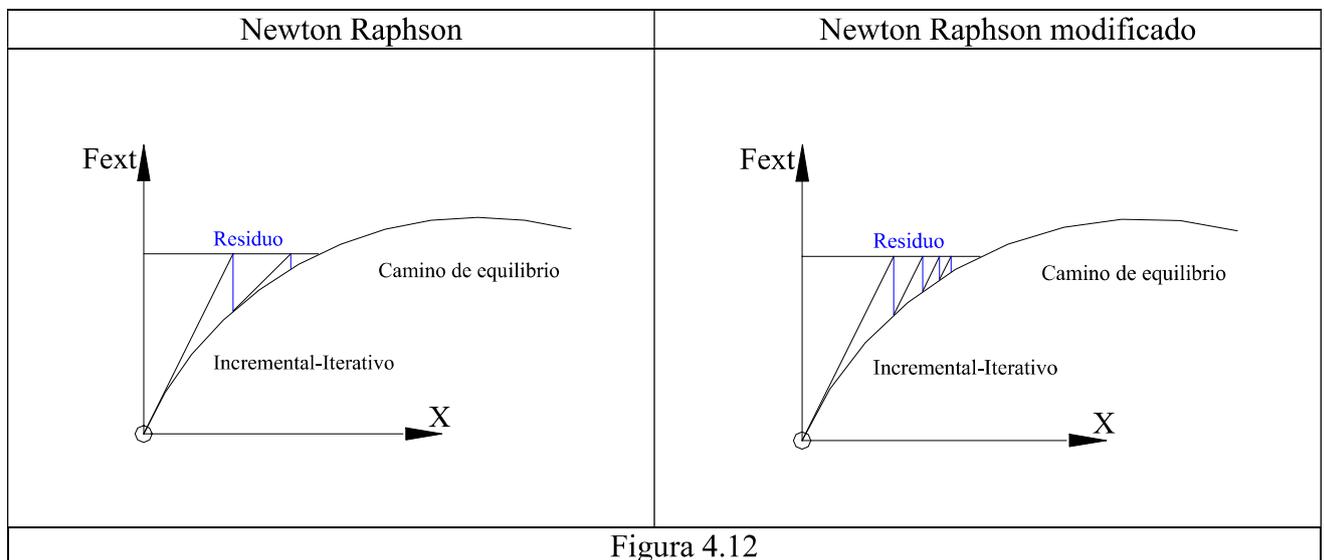
Los desplazamientos vienen dados por los desplazamientos en la iteración anterior más la corrección asociada a la última iteración ${}^n\mathbf{X}^i = {}^n\mathbf{X}^{i-1} + {}^n\delta\mathbf{X}^i$, o como el desplazamiento al principio del incremento, mas la suma de las correcciones realizadas en ese incremento ${}^n\mathbf{X}^i =$

${}^n\mathbf{X}^0 + {}^n\Delta\mathbf{X}^i$. Tomamos como desplazamientos iniciales del incremento “n”, los obtenidos al final del incremento “n-1” ${}^n\mathbf{X}^0 = {}^{n-1}\mathbf{X}$.

La diferencia entre las correcciones acumuladas en la iteración “i”, y las realizadas en la iteración “i-1”, viene dada por la corrección realizada en la iteración “i” ${}^n\Delta\mathbf{X}^i = {}^n\Delta\mathbf{X}^{i-1} + {}^n\delta\mathbf{X}^i$.

Se calcula el residuo, como la diferencia entre las fuerzas internas y las externas en cada nodo $\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{X}) - \mathbf{F}_{ext}$, donde el residuo en la iteración “i” del incremento “n”, viene dado por $\mathbf{R}({}^n\mathbf{X}^i) = \mathbf{F}_{int}({}^n\mathbf{X}^i) - {}^n\mathbf{F}_{ext}$. La matriz tangente en la iteración “i-1” del incremento “n” viene dada por $\mathbf{K}({}^n\mathbf{X}^{i-1}) = \frac{\partial {}^n\mathbf{F}_{int}^{i-1}}{\partial \mathbf{X}}$; la corrección de los desplazamientos viene dada por el sistema de ecuaciones $\mathbf{K}({}^n\mathbf{X}^{i-1}) \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^i = -\mathbf{R}({}^n\mathbf{X}^{i-1})$.

Se descompone el proceso de carga en una serie de incrementos y en cada incremento se realizan las iteraciones necesarias por “anular” el residuo.



Line search. Método empleado para mejorar la efectividad del N.R.. Sirve para escalar el vector corrección iterativa del desplazamiento, acercándonos lo más posible a la situación de potencial mínimo. En un N.R. este factor de escala es por defecto 1.

$${}^n\mathbf{X}^i = {}^n\mathbf{X}^{i-1} + \alpha_i \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^i \dots\dots\dots(4.10)$$

$$\Psi(\alpha) = {}^n\delta\mathbf{X}^i \cdot \mathbf{R}({}^n\mathbf{X}^{i-1} + \alpha \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^i) \dots\dots\dots(4.11)$$

Se calcula Ψ para $\alpha=1$; $\alpha=0$, y se interpola linealmente el valor de $\Psi(\alpha_i)=0$, obteniendo α_i .

Para no linealidades muy acusadas o bruscas, paso de puntos máximos, mínimos etc.... el análisis controlando la carga aplicada no es capaz de seguir el diagrama de equilibrio. Es necesario realizar el control de los incrementos de otras formas: Combinar el N. R. con métodos puramente incrementales (Bergan, 1978), realizar un control de desplazamientos (Argyris 1965), u otros como el de longitud de arco constante y sus distintas variantes (Wempner 1971, Riks 1979, Ramm 1980 y Crisfield 1983), el de control del trabajo realizado (Karamanlidis 1980).

A continuación, se hace un breve resumen de cómo se implementan las diversas técnicas de control de carga aplicada anteriormente, corrigiendo la carga en cada iteración con el termino ${}^n\delta\lambda^i \cdot \mathbf{Fext}$, donde el parámetro ${}^n\delta\lambda^i$, se calcula de modo que las iteraciones tengan lugar sobre un arco, una recta normal a la tangente inicial, o bien se fije el valor de una componente del desplazamiento.

En los algoritmos que se escriben a continuación se mantiene la notación anterior añadiendo:

${}^n\Delta\lambda^1$ = Predicción del nivel de carga

${}^n\delta\lambda^i$ = Corrección iterativa del nivel de carga

El Esquema de control general

$${}^n\mathbf{Fext}^{i+1} = {}^n\mathbf{Fext}^i + {}^n\delta\lambda^i \cdot \mathbf{Fext} \dots\dots\dots(4.12)$$

$${}^n\mathbf{Fext}^{i+1} = {}^n\mathbf{Fext}^0 + {}^n\Delta\lambda^i \cdot \mathbf{Fext} \dots\dots\dots(4.13)$$

$$\text{Tomamos } {}^n\mathbf{Fext}^0 = {}^{n-1}\mathbf{Fext} \dots\dots\dots(4.14)$$

$${}^n\Delta\lambda^i \cdot \mathbf{Fext} = {}^n\Delta\lambda^{i-1} \cdot \mathbf{Fext} + {}^n\delta\lambda^i \cdot \mathbf{Fext} \rightarrow {}^n\Delta\lambda^i = {}^n\Delta\lambda^{i-1} + {}^n\delta\lambda^i \dots\dots\dots(4.15)$$

Fase de predicción

$$\mathbf{K}({}^{n-1}\mathbf{X}) \cdot {}^n\Delta\mathbf{X}^1 = {}^n\Delta\lambda^1 \cdot \mathbf{Fext} \dots\dots\dots(4.16)$$

$$\mathbf{K}({}^{n-1}\mathbf{X}) \cdot {}^n\Delta\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{Fext} \quad ; \quad {}^n\Delta\mathbf{X}^1 = {}^n\Delta\lambda^1 \cdot {}^n\Delta\mathbf{X}_{ij} \dots\dots\dots(4.17)$$

$\{ {}^n\Delta\mathbf{X}_{ij}, {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1}, {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} \}$ = variables auxiliares desplazamientos.

$${}^n\Delta\lambda^1 = \pm {}^n\Delta L / [({}^n\Delta\mathbf{X}_{ij})^t \cdot ({}^n\Delta\mathbf{X}_{ij}) + b \cdot (\mathbf{Fext})^t \cdot (\mathbf{Fext})]^{0.5} \dots\dots\dots(4.18)$$

Fase de corrección

$$\mathbf{R}({}^n\mathbf{X}^{i+1}) = \mathbf{Fint}({}^n\mathbf{X}^{i+1}) - {}^n\mathbf{Fext}^{i+1} \dots\dots\dots(4.19)$$

$$\mathbf{K}({}^n\mathbf{X}^i) \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} = -\mathbf{R}({}^n\mathbf{X}^i) + {}^n\delta\lambda^{i+1} \cdot \mathbf{Fext} \dots\dots\dots(4.20)$$

$$\mathbf{K}({}^n\mathbf{X}^i) \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} = -\mathbf{R}({}^n\mathbf{X}^i) \quad ; \quad {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} = {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} + {}^n\delta\lambda^{i+1} \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} \dots\dots\dots(4.21)$$

$$\mathbf{K}({}^n\mathbf{X}^i) \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{Fext} \dots\dots\dots(4.22)$$

$${}^n\Delta\lambda^{i+1} = {}^n\Delta\lambda^i + {}^n\delta\lambda^{i+1} \dots\dots\dots(4.23)$$

$${}^n\Delta\mathbf{X}^{i+1} = {}^n\Delta\mathbf{X}^i + {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} \dots\dots\dots(4.24)$$

Las ecuaciones que definen ${}^n\delta\lambda^i$ en las diversas técnicas de control son:

Control de la longitud de arco. En estos métodos, en vez de asignar a cada incremento un incremento de fuerzas exteriores fijo, lo que se hacer es imponer la longitud de arco del incremento “n” (${}^n\Delta L$).

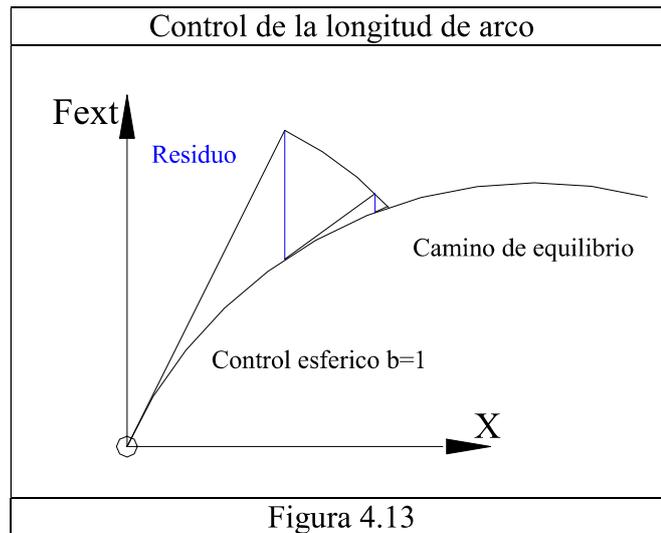
Como se calcula esta longitud de arco es lo que va a diferenciar las distintas variantes de este método. La ecuación inferior representa la forma genérica de calcular en la que según el valor del parámetro b, nos encontraremos en una variante u otra.

$$({}^n\Delta\mathbf{X}^{i+1})^t \cdot ({}^n\Delta\mathbf{X}^{i+1}) + b \cdot ({}^n\Delta\lambda^{i+1})^2 \cdot (\mathbf{Fext})^t \cdot (\mathbf{Fext}) = ({}^n\Delta L)^2 \dots\dots\dots(4.25)$$

De donde se deduce que ${}^n\delta\lambda^{i+1}$, viene dado por una ecuación de segundo grado:

$$\left(\frac{{}^n\delta\lambda^{i+1}}{({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1})^2} \right)^2 \cdot [({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1})^2 + b \cdot (\mathbf{Fext})^2] + \left(\frac{{}^n\delta\lambda^{i+1}}{({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1})} \right) \cdot [2 \cdot ({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1}) \cdot ({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} + {}^n\Delta\mathbf{X}^i) + 2 \cdot b \cdot {}^n\Delta\lambda^i (\mathbf{Fext})^2] + [({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} + {}^n\Delta\mathbf{X}^i)^2 + b \cdot ({}^n\Delta\lambda^i)^2 \cdot (\mathbf{Fext})^2 - ({}^n\Delta L)^2] = 0 \dots\dots\dots(4.26)$$

El escalador b se suele tomar igual a 0 (control cilíndrico) o a 1 (control esférico).



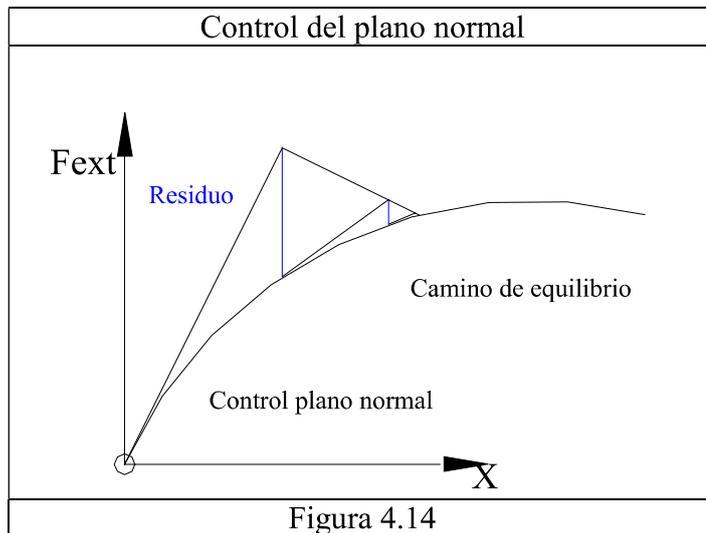
Control del plano normal. (Riks-Wempner)

Se impone la condición de que la proyección del vector $({}^n\Delta\mathbf{X}^{i+1}, {}^n\Delta\lambda^{i+1} \cdot (\mathbf{Fext}))$ sobre el vector predictor $({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}))$, es ${}^n\Delta L$. Por ser la proyección constante el avance es ortogonal.

$$({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext})) / \|({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}))\| \cdot ({}^n\Delta\mathbf{X}^{i+1}, {}^n\Delta\lambda^{i+1} \cdot (\mathbf{Fext})) = {}^n\Delta L \dots \dots \dots (4.27)$$

de donde se deduce que:

$$\frac{({}^n\delta\lambda^{i+1})}{\|({}^n\delta\lambda^{i+1})\|} \cdot [{}^n\Delta\mathbf{X}^i \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} + {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}) \cdot (\mathbf{Fext})] = {}^n\Delta L \cdot \|({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}))\| - {}^n\Delta\mathbf{X}^i \cdot ({}^n\Delta\mathbf{X}^i + {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1}) - {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}) \cdot {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}) \dots \dots \dots (4.28)$$



Control del plano normal actualizado.

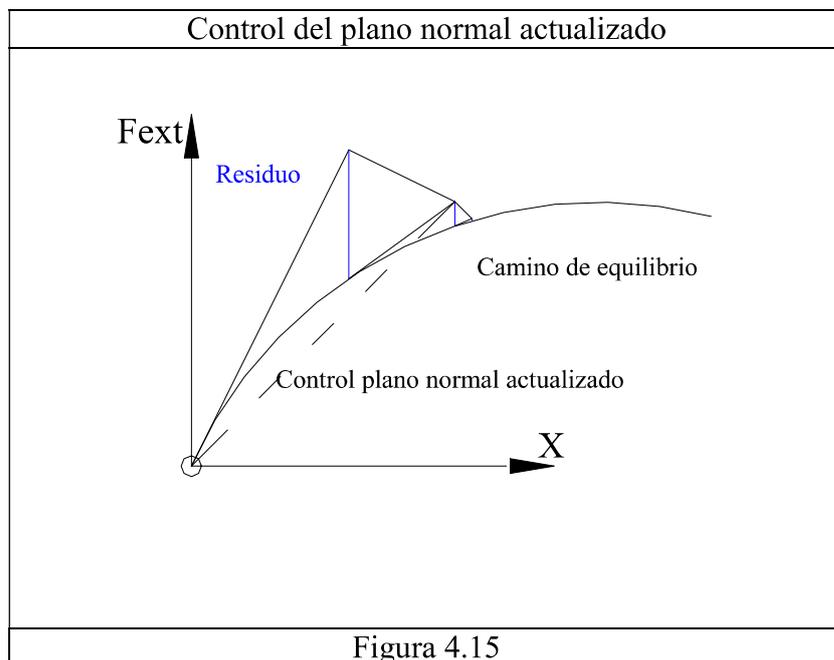
Se impone la condición de que la proyección del vector $({}^n\Delta\mathbf{X}^{i+1}, {}^n\Delta\lambda^{i+1} \cdot (\mathbf{Fext}))$, sobre el vector predictor actualizado es $({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}))$ es ${}^n\Delta L^i$.

$$({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext})) / \|({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}))\| \cdot ({}^n\Delta\mathbf{X}^{i+1}, {}^n\Delta\lambda^{i+1} \cdot (\mathbf{Fext})) = {}^n\Delta L^i \approx {}^n\Delta L \dots \dots \dots (4.29)$$

$$\text{donde } {}^n\Delta L^i = \|({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}))\| \dots \dots \dots (4.30)$$

De donde se deduce que:

$$\frac{({}^n\delta\lambda^{i+1})}{({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1})} \cdot [{}^n\Delta\mathbf{X}^i \cdot ({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1}) + {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}) \cdot (\mathbf{Fext})] = {}^n\Delta L \cdot \|({}^n\Delta\mathbf{X}^i, {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}))\| - ({}^n\Delta\mathbf{X}^i \cdot ({}^n\delta\mathbf{X}^{i+1}) - {}^n\Delta\lambda^i \cdot (\mathbf{Fext}) \cdot ({}^n\delta\lambda^{i+1})) \dots \dots \dots (4.31)$$



Control de desplazamientos.

Supongamos que la componente del vector desplazamiento que se especifica es la j, y fijamos ΔX_j .

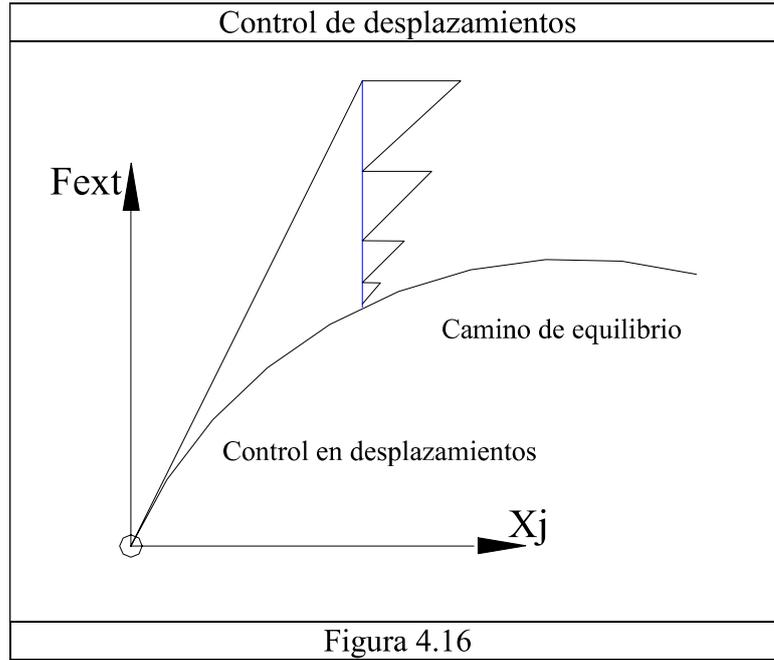
Se impone la condición de que el incremento de desplazamiento de la componente j sea ΔX_j

$${}^n\Delta X_j^{i+1} = {}^n\Delta X_j^i + ({}^n\delta X_j^{i+1} + {}^n\delta\lambda^{i+1} \cdot {}^n\delta X_j^{i+1}) = \Delta X_j \dots \dots \dots (4.32)$$

$${}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} = {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1} + {}^n\delta\lambda^{i+1} \cdot {}^n\delta\mathbf{X}^{i+1}; \text{ como } {}^n\Delta X_j^i = \Delta X_j \dots \dots \dots (4.33)$$

$$\text{Por tanto } {}^n\delta\lambda^{i+1} = -{}^n\delta X_j^{i+1} / {}^n\delta X_j^{i+1} \dots \dots \dots (4.34)$$

Para la primera iteración resulta ${}^n\Delta X_j^1 = {}^n\Delta\lambda^1 \cdot {}^n\Delta X_{jii}$, de donde se deduce que ${}^n\Delta\lambda^1 = \Delta X_j / {}^n\Delta X_{jii}$



4.4 NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA CON GRANDES GIROS Y PEQUEÑAS DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS DE BARRAS Y ELEMENTOS SUPERFICIALES PLANOS

Se adopta una formulación co-rotacional que se basa en descomponer el movimiento de cada elemento en el movimiento de un sólido rígido más un movimiento de deformación pura. La discretización ha de ser suficiente como para que los movimientos en cada configuración respecto a los ejes co-rotacionales sean pequeños.

En cada incremento partiremos de los movimientos totales $\{\mathbf{d}_T\}$ y queremos obtener los de deformación pura $\{\mathbf{d}_D\}$, que como veremos en el apartado de no-linealidades mecánicas, podemos relacionar con las fuerzas internas.

Centrando nuestra atención en los giros, supongamos que tenemos un triedro ortonormal dextrógiro inicial $[\{\alpha_A\}, \{\beta_A\}, \{\gamma_A\}]$, que sufre un giro $\{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$, definido por la matriz $[R_T]$, que lo transforma en $[\{\alpha_B\}, \{\beta_B\}, \{\gamma_B\}]$, la relación entre estos dos triedros viene dada por:

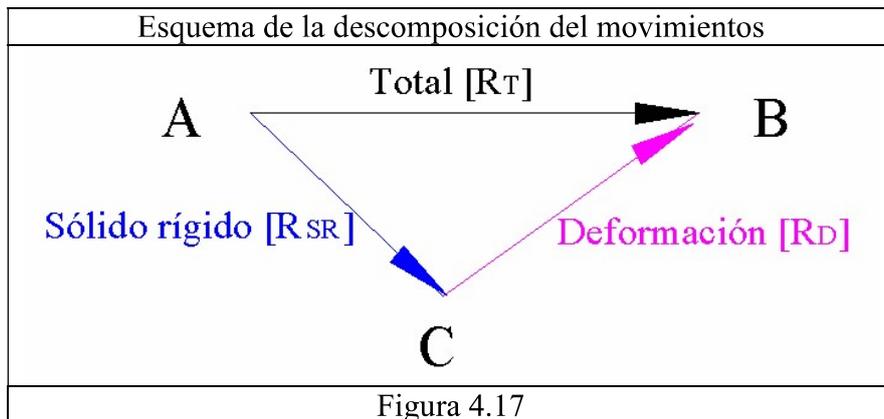
$$[\{\alpha_B\}, \{\beta_B\}, \{\gamma_B\}] = [R_T] \cdot [\{\alpha_A\}, \{\beta_A\}, \{\gamma_A\}] \dots\dots\dots(4.35)$$

La matriz de rotación asociada con un giro $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ viene dado por:

$$[R_T] = e^{[W]} = [I] + \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} [W] + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\varphi/2} \right)^2 \cdot [W]^2 \dots\dots\dots(4.36)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.37)$$

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.38)$$



El giro $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$, definido por la matriz $[R_T]$, lo podemos expresar como una primera rotación de sólido rígido, definida por la matriz $[R_{SR}]$, más una rotación de deformación pura $[R_D]$, resultando:

$$[\{\alpha_C\}, \{\beta_C\}, \{\gamma_C\}] = [R_{SR}] \cdot [\{\alpha_A\}, \{\beta_A\}, \{\gamma_A\}] \dots \dots \dots (4.39)$$

$$[\{\alpha_B\}, \{\beta_B\}, \{\gamma_B\}] = [R_D] \cdot [\{\alpha_C\}, \{\beta_C\}, \{\gamma_C\}] \dots \dots \dots (4.40)$$

siendo por tanto:

$$[\{\alpha_B\}, \{\beta_B\}, \{\gamma_B\}] = [R_D] \cdot [R_{SR}] \cdot [\{\alpha_A\}, \{\beta_A\}, \{\gamma_A\}] \dots \dots \dots (4.41)$$

De 4.35 y 4.41, obtenemos la relación entre las rotaciones totales, las de sólido rígido y las de deformación pura:

$$[R_T] = [R_D] \cdot [R_{SR}] \dots \dots \dots (4.42)$$

y por tanto las rotaciones de deformación pura se pueden expresar como:

$$[R_D] = [R_T] \cdot [R_{SR}]^{-1} = [R_T] \cdot [R_{SR}]^T \dots \dots \dots (4.43)$$

De forma general el giro $\{\theta\} = \{\theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$ se puede obtener como $\{\theta\} = \log([R_D])$ (ver Spurrier (1978)).

Por ser el giro $\{\theta\}$ pequeño la matriz $[R_D]$ se puede aproximar por:

$$[R_D] = [I] + [W]$$

$$[R_D] = [I] + [W] = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.44)$$

Vista esta idea fundamental, se dan a continuación los desarrollos necesarios para la implementación en barras y láminas.

En los siguientes desarrollos, el subíndice *i* hace referencia a la configuración en la que nos encontramos: *i=A* es la configuración neutra e *i=B* es la configuración deformada.

4.4.1- NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA CON GRANDES GIROS Y PEQUEÑAS DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS DE BARRAS

Tenemos definidos en cada elemento los siguientes triedros:

- 1- Ejes locales de barra $[\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}]$. El eje $\{x\}$ va del nudo (1) dorsal al frontal (2), los ejes $\{y\}, \{z\}$ forman con el $\{x\}$ un sistema dextrógiro orto-normal en el que estos coinciden con los principales de inercia de la sección. Los ejes locales de barra sólo experimentan un giro de sólido rígido.
- 2- Los ejes del extremo dorsal (1) $[\{\alpha_1\}, \{\beta_1\}, \{\gamma_1\}]$ y frontal de la barra (2) $[\{\alpha_2\}, \{\beta_2\}, \{\gamma_2\}]$, inicialmente coinciden con los locales de barra y se mueven solidariamente con el extremo de la barra.

En las iteraciones se producirán unos movimientos totales de los extremos de las barras de magnitud:

$$(U_1, V_1, W_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1}, \phi_1) \text{ y } (U_2, V_2, W_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2}, \phi_2)$$

donde los giros $(\varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1})$, incluyen un giro de sólido rígido y un giro asociado a la deformación de la barra.

La matriz $[R_{T1}]$ está definida por el giro $(\varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1})$ y la matriz $[R_{T2}]$ por el giro $(\varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2})$.

Los ejes locales de barra en la configuración inicial A se conocen y más adelante se indica como obtener los de la configuración B.

Estos ejes están relacionados por la matriz $[R_{SR}]$.

$$[\{x_B\}, \{y_B\}, \{z_B\}] = [R_{SR}] \cdot [\{x_A\}, \{y_A\}, \{z_A\}] \dots \dots \dots (4.45)$$

que podemos expresar de forma simbólica como:

$$[T_B] = [R_{SR}] \cdot [T_A] \dots \dots \dots (4.46)$$

de donde:

$$[R_{SR}] = [T_B] \cdot [T_A]^{-1} = [T_B] \cdot [T_A]^T \dots \dots \dots (4.47)$$

siendo $[T_i]$, la matriz que contiene en cada columna los ejes locales de barra en la configuración 'i'.

De 4.43, se puede determinar en cada extremo de barra los giros asociados a la deformación pura de la barra:

$$\text{Del nudo 1 } [R_{D1}] = [R_{T1}] \cdot [R_{SR}]^T \dots \dots \dots (4.48)$$

$$\text{Del nudo 2 } [R_{D2}] = [R_{T2}] \cdot [R_{SR}]^T \dots \dots \dots (4.49)$$

El resto de los parámetros asociados a la deformación pura de la barra son los alabeos ϕ_1, ϕ_2 y el alargamiento de la barra u_2 , que se obtiene como diferencia entre la longitud final y la inicial:

$$u_2 = L_f - L_o = \sqrt{(X_2 + U_2 - X_1 - U_1)^2 + (Y_2 + V_2 - Y_1 - V_1)^2 + (Z_2 + W_2 - Z_1 - W_1)^2} - \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \dots \dots \dots (4.50)$$

siendo (X_i, Y_i, Z_i) las coordenadas de los nudos en la configuración inicial.

En el apartado siguiente se expone la obtención de las fuerzas en los extremos de barra $\{M_{y1}, M_{z1}, Bi_1, f_{x2}, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}, Bi_2\}$, en función de los movimientos asociados a la deformación pura $\{\theta_{y1}, \theta_{z1}, \phi_1, u_2, \theta_{xD}, \theta_{y2}, \theta_{z2}, \phi_2\}$.

$$\theta_{xD} = \theta_{x2} - \theta_{x1} \dots \dots \dots (4.51)$$

Particularizando el desarrollo anterior para sistemas con comportamiento plano (2D), tenemos:

Datos: Desplazamientos y giros totales $(U_1, V_1, \varphi_{z1}), (U_2, V_2, \varphi_{z2})$.

Incógnitas: Movimientos asociados a la deformación pura de la barra $\{\theta_{z1}, \theta_{z2}, u_2\}$.

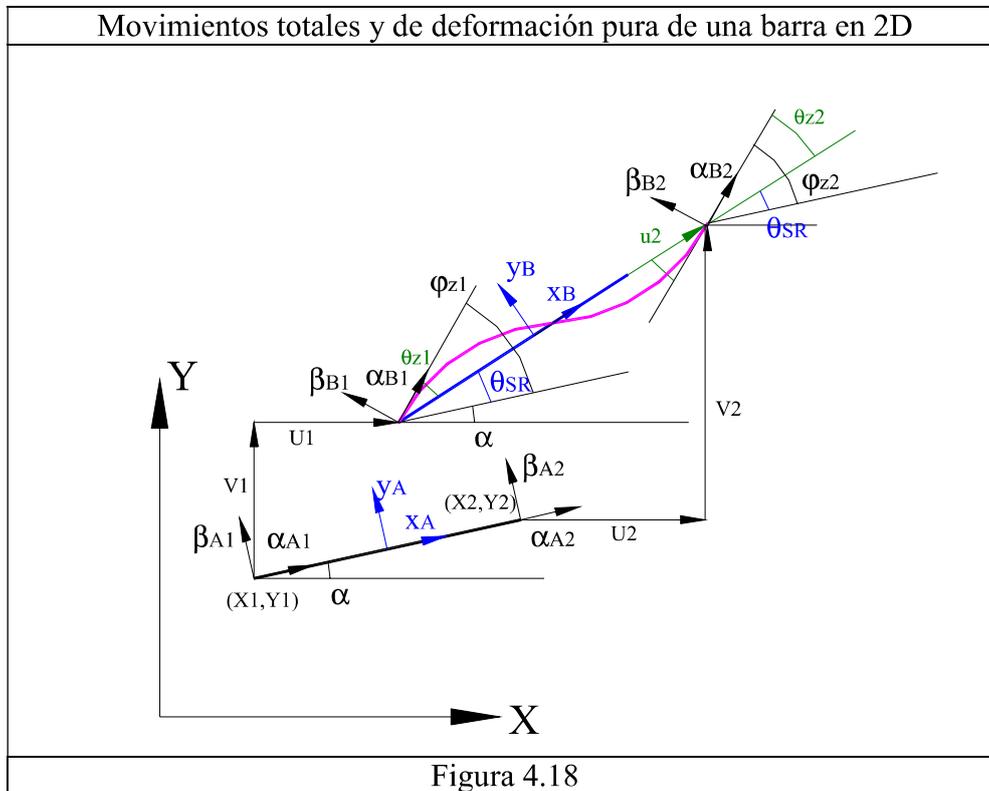


Figura 4.18

Las matrices $[R_T]$ asociadas a los extremos de barra son:

$$[R_{T1}] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{z1}) & -\text{sen}(\varphi_{z1}) \\ \text{sen}(\varphi_{z1}) & \cos(\varphi_{z1}) \end{bmatrix}; [R_{T2}] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{z2}) & -\text{sen}(\varphi_{z2}) \\ \text{sen}(\varphi_{z2}) & \cos(\varphi_{z2}) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.52)$$

Las matrices $[T]$ asociadas a los ejes locales de barra serán:

En la configuración inicial A:

$$x_A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) \end{pmatrix}; y_A = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ siendo por tanto } [T_A] = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4.53)$$

En la configuración final B:

$$x_B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta_{SR}) \\ \text{sen}(\alpha + \theta_{SR}) \end{pmatrix}; y_B = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\alpha + \theta_{SR}) \\ \cos(\alpha + \theta_{SR}) \end{pmatrix} \Rightarrow [T_B] = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta_{SR}) & -\text{sen}(\alpha + \theta_{SR}) \\ \text{sen}(\alpha + \theta_{SR}) & \cos(\alpha + \theta_{SR}) \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4.54)$$

La rotación de sólido rígido $[R_{SR}]$ de 4.47, será pues:

$$[R_{SR}] = [T_B] \cdot [T_A]^{-1} = [T_B] \cdot [T_A]^T \dots\dots\dots(4.55)$$

$$[R_{SR}] = [T_B][T_A]^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{SR}) & -\text{sen}(\theta_{SR}) \\ \text{sen}(\theta_{SR}) & \cos(\theta_{SR}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4.56)$$

y los giros de deformación pura en los extremos de barra serán de 4.43:

$$[R_{D1}] = [R_{T1}][R_{SR}]^T = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{z1} - \theta_{SR}) & -\text{sen}(\varphi_{z1} - \theta_{SR}) \\ \text{sen}(\varphi_{z1} - \theta_{SR}) & \cos(\varphi_{z1} - \theta_{SR}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4.57)$$

$$[R_{D2}] = [R_{T2}][R_{SR}]^T = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{z2} - \theta_{SR}) & -\text{sen}(\varphi_{z2} - \theta_{SR}) \\ \text{sen}(\varphi_{z2} - \theta_{SR}) & \cos(\varphi_{z2} - \theta_{SR}) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4.58)$$

De forma general el giro θ_{z1} se puede obtener como $\theta_{z1} = \log([R_{D1}]) = \varphi_{z1} - \theta_{SR}$

Como los giros asociados a la deformación pura de la barra son pequeños, se puede aproximar por:

$$[R_D] \approx [I] + [W] = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z \\ \theta_z & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.59)$$

de donde se deduce que:

$$\theta_{z1} \approx \text{sen}(\varphi_{z1} - \theta_{SR}) \dots\dots\dots(4.60)$$

$$\theta_{z2} \approx \text{sen}(\varphi_{z2} - \theta_{SR}) \dots\dots\dots(4.61)$$

El otro movimiento asociado a la deformación pura de la barra es u_2 , que se obtiene de como diferencia entre la longitud final y la inicial:

$$u_2 = L_f - L_o = \sqrt{(X_2 + U_2 - X_1 - U_1)^2 + (Y_2 + V_2 - Y_1 - V_1)^2} - \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \dots\dots\dots(4.62)$$

En sistemas tridimensionales (3D), el proceso es el mismo, con la salvedad de que la obtención del giro de sólido rígido de la barra se complica, por el cálculo de la posición de los ejes principales de inercia en la configuración deformada $\{y_B\}$, $\{z_B\}$. A continuación se expone la forma en la que se procede:

El eje local $\{x_B\}$ une los extremos de la barra en la configuración deformada. Su vector unitario es:

$$\{x_B\} = \frac{1}{L_f} (X_2 + U_2 - X_1 - U_1 \quad Y_2 + V_2 - Y_1 - V_1 \quad Z_2 + W_2 - Z_1 - W_1) \quad (4.63)$$

Los ejes $\{y_B\}$ y $\{z_B\}$, se obtienen con un proceso que consta de 4 pasos:

A- Se obtiene la proyección de los ejes locales del extremo 1 $\{\beta_{1B}\}$; $\{\gamma_{1B}\}$ sobre el plano ortogonal al eje local $\{x_B\}$.

$$\{\gamma_1^*\} = \{\gamma_{1B}\} - (\{\gamma_{1B}\}^T \cdot \{x_B\}) \{x_B\} \rightarrow \text{Lo hacemos unitario, resultando } \{\underline{\gamma}_1\} = \frac{\{\gamma_1^*\}}{\|\{\gamma_1^*\}\}} \dots\dots(4.64)$$

$$\{\beta_1^*\} = \{\beta_{1B}\} - (\{\beta_{1B}\}^T \cdot \{x_B\}) \{x_B\} \rightarrow \text{Lo hacemos unitario, resultando } \{\underline{\beta}_1\} = \frac{\{\beta_1^*\}}{\|\{\beta_1^*\}\}} \dots\dots(4.65)$$

De forma análoga se obtiene las proyecciones del extremo 2 $\{\gamma_{2B}\}$, $\{\beta_{2B}\}$ sobre el mismo plano.

B- Se promedian las proyecciones de los dos extremos:

$$\{e_z\} = \{\underline{\gamma}_1\} + \{\underline{\gamma}_2\} \rightarrow \text{Lo hacemos unitario, resultando } \{\underline{e}_z\} = \frac{\{e_z\}}{\|\{e_z\}\}} \dots\dots\dots(4.66)$$

$$\{e_y\} = \{\underline{\beta}_1\} + \{\underline{\beta}_2\} \rightarrow \text{Lo hacemos unitario, resultando } \{\underline{e}_y\} = \frac{\{e_y\}}{\|\{e_y\}\}} \dots\dots\dots(4.67)$$

C- Como los vectores $\{\underline{e}_y\}$ y $\{\underline{e}_z\}$ no serán en general ortogonales. Obtenemos las diagonales del rombo que forman, que si lo son:

$$\{e_1\} = \{\underline{e}_y\} + \{\underline{e}_z\} \rightarrow \text{Lo hacemos unitario, resultando } \{\underline{e}_1\} = \frac{\{e_1\}}{\|\{e_1\}\}} \dots\dots\dots(4.68)$$

$$\{e_2\} = \{\underline{e}_y\} - \{\underline{e}_z\} \rightarrow \text{Lo hacemos unitario, resultando } \{\underline{e}_2\} = \frac{\{e_2\}}{\|\{e_2\}\}} \dots\dots\dots(4.69)$$

D- Se obtiene los ejes locales de barras $\{y_B\}$ y $\{z_B\}$ girando los anteriores 45° alrededor de $\{x_B\}$

$$\{y_B\} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\{\underline{e}_1\} + \{\underline{e}_2\}) \dots\dots\dots(4.70)$$

$$\{z_B\} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\{\underline{e}_1\} - \{\underline{e}_2\}) \dots\dots\dots(4.71)$$

Una vez se obtienen las matrices $[R_{D1}]$ y $[R_{D2}]$ de los extremos de las barras, como están asociadas a un giro pequeño, se pueden aproximar por:

$$[R_D] = [I] + [W] = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ -\theta_z & 1 & -\theta_x \\ \theta_y & -\theta_x & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.72)$$

de donde se extraen los giros $\{\theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}\}$ $\{\theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}\}$ asociados a la deformación pura de la barra. El resto de los movimientos asociados a la deformación pura de la

barra son los alabeos ϕ_1, ϕ_2 , el alargamiento de la barra u_2 , que se obtiene como diferencia entre la longitud final y la inicial y el giro de torsión de la barra $\theta_{xD}=\theta_{x2}-\theta_{x1}$:

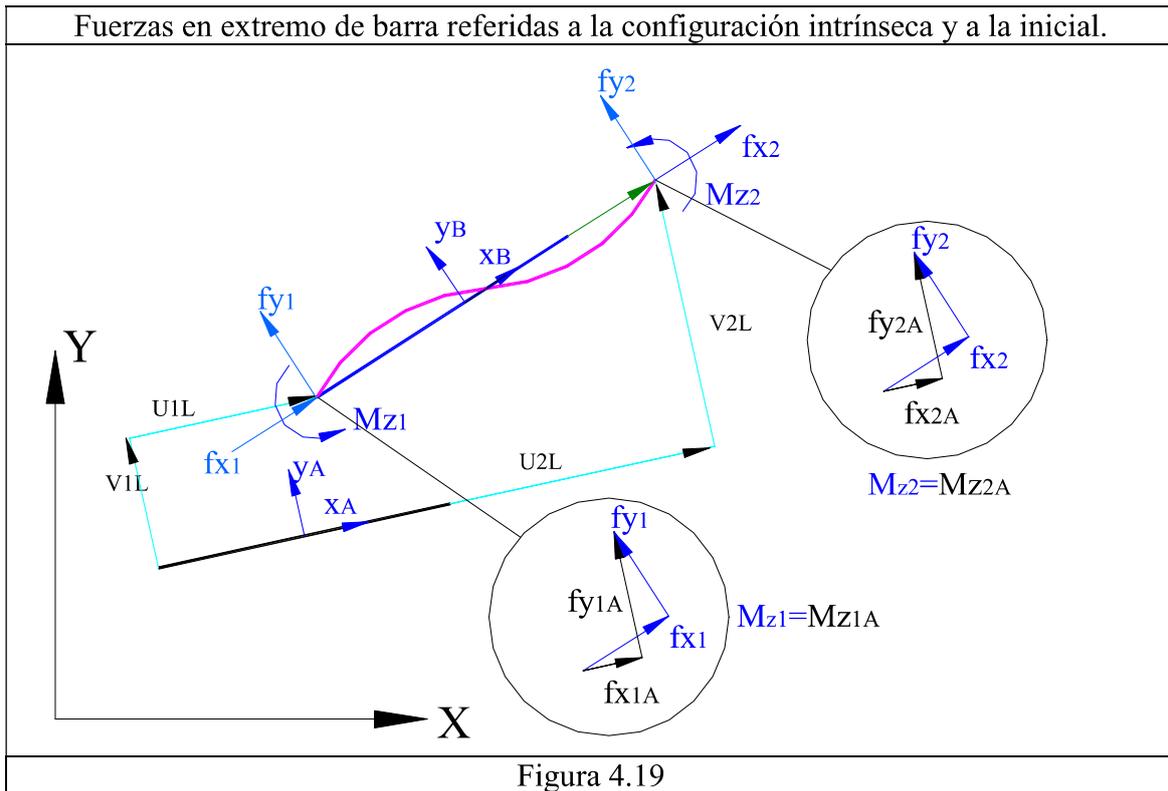
$$u_2 = L_f - L_o = \sqrt{(X_2 + U_2 - X_1 - U_1)^2 + (Y_2 + V_2 - Y_1 - V_1)^2 + (Z_2 + W_2 - Z_1 - W_1)^2} - \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \dots\dots\dots(4.73)$$

Así pues el movimiento que define la deformación pura de la barra, es $\{\mathbf{d}_D\} = \{\theta_{y1}, \theta_{z1}, \phi_1, u_2, \theta_{xD}, \theta_{y2}, \theta_{z2}, \phi_2\}$, que está relacionado con los movimientos totales de los extremos de la barra $\{U_1, V_1, W_1, \phi_{x1}, \phi_{y1}, \phi_{z1}, \phi_1, U_2, V_2, W_2, \phi_{x2}, \phi_{y2}, \phi_{z2}, \phi_2\}$, mediante las relaciones ya obtenidas que podemos expresar como:

$$\{\mathbf{d}_D\} = \mathbf{f}(\{\mathbf{d}_T\}) \dots\dots\dots(4.74)$$

En el apartado siguiente se obtiene la relación entre las cargas en los extremos de la barra $\{\mathbf{fint}_D\} = \{M_{y1}, M_{z1}, Bi_1, f_{x2}, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}, Bi_2\}$, y los movimientos de deformación pura $\{\mathbf{d}_D\} = \{\theta_{y1}, \theta_{z1}, \phi_1, u_2, \theta_{xD}, \theta_{y2}, \theta_{z2}, \phi_2\}$. Tanto las cargas como los movimientos están referidos a los ejes co-rotacionales (Configuración B) de la barra. Se puede anotar como:

$$\{\mathbf{fint}_D\} = \mathbf{g}(\{\mathbf{d}_D\}) \dots\dots\dots(4.75)$$



La relación con el resto de fuerzas en los extremos de la barra, referidas también a los ejes intrínsecos, por consideraciones de equilibrio:

$$\begin{Bmatrix} f_{z1} \\ f_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_f} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{y1} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.76^a)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{y1} \\ f_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_f} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.76b)$$

$$\{f_{x1}\} = -\{f_{x2}\} \dots\dots\dots(4.77)$$

$$\{M_{x1}\} = -\{M_{x2}\} \dots\dots\dots(4.78)$$

que expresado en forma matricial es:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ Bi_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \\ Bi_2 \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_f} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{L_f} & 0 \\ \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{y1} \\ M_{z1} \\ Bi_1 \\ f_{x2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \\ Bi_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.79)$$

El conjunto de todas las fuerzas aplicadas en los extremos de la barra se puede anotar como:

$$\{\mathbf{fint}\}^B = [\mathbf{H}] \cdot \{\mathbf{fint}_D\} \dots\dots\dots(4.80)$$

Refiriendo las fuerzas a los ejes locales de la barra en la geometría neutra, se obtiene:

$$\{\mathbf{fint}\}^A = [\mathbf{R}_{SR}] \{\mathbf{fint}\}^B \dots\dots\dots(4.81)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1A} \\ f_{y1A} \\ f_{z1A} \\ M_{x1A} \\ M_{y1A} \\ M_{z1A} \\ Bi_{1A} \\ f_{x2A} \\ f_{y2A} \\ f_{z2A} \\ M_{x2A} \\ M_{y2A} \\ M_{z2A} \\ Bi_{2A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{SR}]_{3 \times 3} & [0] & \{0\} & [0] & [0] & \{0\} \\ [0] & [R_{SR}] & \{0\}_{3 \times 1} & [0] & [0] & \{0\} \\ \{0\}^T & \{0\}^T & 1 & \{0\}^T & \{0\}^T & 0 \\ [0] & [0] & \{0\} & [R_{SR}] & [0] & \{0\} \\ [0] & [0] & \{0\} & [0] & [R_{SR}] & \{0\} \\ \{0\}^T & \{0\}^T & 0 & \{0\}^T & \{0\}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ Bi_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \\ Bi_2 \end{Bmatrix}_B \dots\dots\dots(4.82)$$

Se puede ver que los bimomentos no dependen del sistema de referencia. Sustituyendo (4.80) en (4.81) se llega a:

$$\{\mathbf{fint}\}^A = [R_{SR}][H] \cdot \{\mathbf{fint}_D\} \dots\dots\dots(4.83)$$

Con objeto de obtener la matriz de rigidez tangente consistente con este método, se deben obtener las fuerzas internas referidas a los ejes locales de barra iniciales $\{\mathbf{fint}\}^A$, y derivarlas respecto a los movimientos totales referidos a los ejes locales de barra iniciales, obteniéndose:

$$\frac{d\{\mathbf{fint}\}^A}{d\{d_T\}} = \frac{d[R_{SR}]}{d\{d_T\}} [H] \{\mathbf{fint}_D\} + [R_{SR}] [H] \frac{d\{\mathbf{fint}_D\}}{d\{d_D\}} \frac{d\{d_D\}}{d\{d_T\}} \dots\dots\dots(4.84)$$

Esta matriz ha sido obtenida por diversos autores, Crisfield (1997).

El término $\frac{d\{\mathbf{fint}_D\}}{d\{d_D\}}$ se obtiene en el apartado no-lineal mecánico.

La expresión de la matriz se puede simplificar en caso actualizar la geometría.

Particularizando el desarrollo anterior para sistemas con comportamiento plano (2D):

Datos:

- Desplazamientos y giros totales expresados en ejes locales de barra ($U_{1L}, V_{1L}, \varphi_{z1L}$), ($U_{2L}, V_{2L}, \varphi_{z2L}$). Caso particular de la figura 4.18 en el que $\alpha=0$.
- Movimientos asociados a la deformación pura de la barra $\{\theta_{z1}, \theta_{z2}, u_2\}$
- Fuerzas en extremos de barra asociadas a la deformación pura $\{\mathbf{fint}_D\} = \{M_{z1}, f_{x2}, M_{z2}\}$

Incógnitas: Matriz de rigidez

La relación con el resto de fuerzas en los extremos de la barra, referidas también a los ejes intrínsecos, se obtienen por consideraciones de equilibrio: $\{\mathbf{fint}\} = [H] \cdot \{\mathbf{fint}_D\}$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ L_f & 0 & L_f \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ L_f & 0 & L_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{z1} \\ f_{x2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.85)$$

Referidas a los ejes locales de barra inicial $\{\mathbf{fint}\}^A = [\mathbf{R}_{SR}][\mathbf{H}] \cdot \{\mathbf{fint}_D\}$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1A} \\ f_{y1A} \\ M_{z1A} \\ f_{x2A} \\ f_{y2A} \\ M_{z2A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{SR}) & -\text{sen}(\theta_{SR}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta_{SR}) & \cos(\theta_{SR}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_{SR}) & -\text{sen}(\theta_{SR}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta_{SR}) & \cos(\theta_{SR}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.85)$$

El cálculo de $\frac{d\{d_D\}}{d\{d_T\}}$ consiste en expresar du_2 , $d\theta_{z1}$ y $d\theta_{z2}$ en función de $(dU_{1L}, dV_{1L}, d\phi_{z1L}, dU_{2L}, dV_{2L}, d\phi_{z2L})$:

Cálculo de du_2 :

$$du_2 = dL_f - dL_o = \frac{(L_o + U_{2L} - U_{1L})}{L_f} (dU_{2L} - dU_{1L}) + \frac{(V_{2L} - V_{1L})}{L_f} (dV_{2L} - dV_{1L}) \dots(4.86)$$

Cálculo de $d\theta_{z1}$:

$$d\theta_{z1} \approx d(\text{sen}(\phi_{z1} - \theta_{SR})) = \cos(\phi_{z1} - \theta_{SR})(d\phi_{z1} - d\theta_{SR}) \approx (d\phi_{z1} - d\theta_{SR}) \dots\dots\dots(4.87)$$

Para deducir $d\theta_{SR}$ se tiene, por consideraciones geométricas que $\text{sen}(\theta_{SR}) = \frac{V_{2L} - V_{1L}}{L_f}$ y

$$\cos(\theta_{SR}) = \frac{L_o + U_{2L} - U_{1L}}{L_f}$$

$$d(\text{sen}(\theta_{SR})) = d\theta_{SR} \cdot \cos(\theta_{SR}) = \frac{dV_{2L} - dV_{1L}}{L_f} - \frac{1}{L_f^2} \left[\frac{(L_o + U_{2L} - U_{1L})}{L_f} (dU_{2L} - dU_{1L}) + \frac{(V_{2L} - V_{1L})}{L_f} (dV_{2L} - dV_{1L}) \right] \dots\dots\dots(4.88)$$

de donde se deduce que:

$$d\theta_{SR} = \frac{L_f}{L_o + U_{2L} - U_{1L}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_{2L} - dV_{1L}}{L_f} \\ - \frac{V_{2L} - V_{1L}}{L_f^2} \left[\frac{(L_o + U_{2L} - U_{1L})}{L_f} (dU_{2L} - dU_{1L}) + \frac{(V_{2L} - V_{1L})}{L_f} (dV_{2L} - dV_{1L}) \right] \end{array} \right\} \dots\dots\dots(4.89)$$

Cálculo de θ_{z2} :

De modo análogo se obtendría:

$$d\theta_{z2} \approx d(\text{sen}(\varphi_{z2} - \theta_{SR})) = \cos(\varphi_{z2} - \theta_{SR})(d\varphi_{z2} - d\theta_{SR}) \approx (d\varphi_{z2} - d\theta_{SR}) \dots\dots\dots(4.90)$$

Para realizar el cálculo de $\frac{d[R_{SR}]}{d\{d_T\}}$ hay que realizar el cálculo de $d(\text{sen}(\theta_{SR}))$ y el de $d(\cos(\theta_{SR}))$, expresándolos en función de $(dU_{1L}, dV_{1L}, d\varphi_{z1L}, dU_{2L}, dV_{2L}, d\varphi_{z2L})$. El primero ya ha sido realizado y el segundo se realiza de forma análoga.

En sistemas tridimensionales (3D) el proceso es el mismo, con la salvedad de que el cálculo de la derivada de la matriz de rotación se complica lo que repercute en el cálculo de $\frac{d\{d_D\}}{d\{d_T\}}$ donde $\{\mathbf{d}_D\} = \{\theta_{y1}, \theta_{z1}, \phi_1, u_2, \theta_{xD}, \theta_{y2}, \theta_{z2}, \phi_2\}$ y $\{\mathbf{d}_T\} = \{U_1, V_1, W_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1}, \phi_1, U_2, V_2, W_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2}, \phi_2\}$ (para obtener las derivadas de los giros conviene partir de la matriz de rotación expresada en la forma exponencial). También hay que realizar el cálculo de $\frac{d[R_{SR}]}{d\{d_T\}}$ donde $[R_{SR}]$ es la matriz que define el giro de sólido rígido de la barra.

Se puede reducir la discretización necesaria incorporando a nivel de cada elemento la posibilidad de captar parte del comportamiento no-lineal geométrico, haciendo uso de los desarrollos realizados en los apartados 3.4.4 y A1.1.2.5

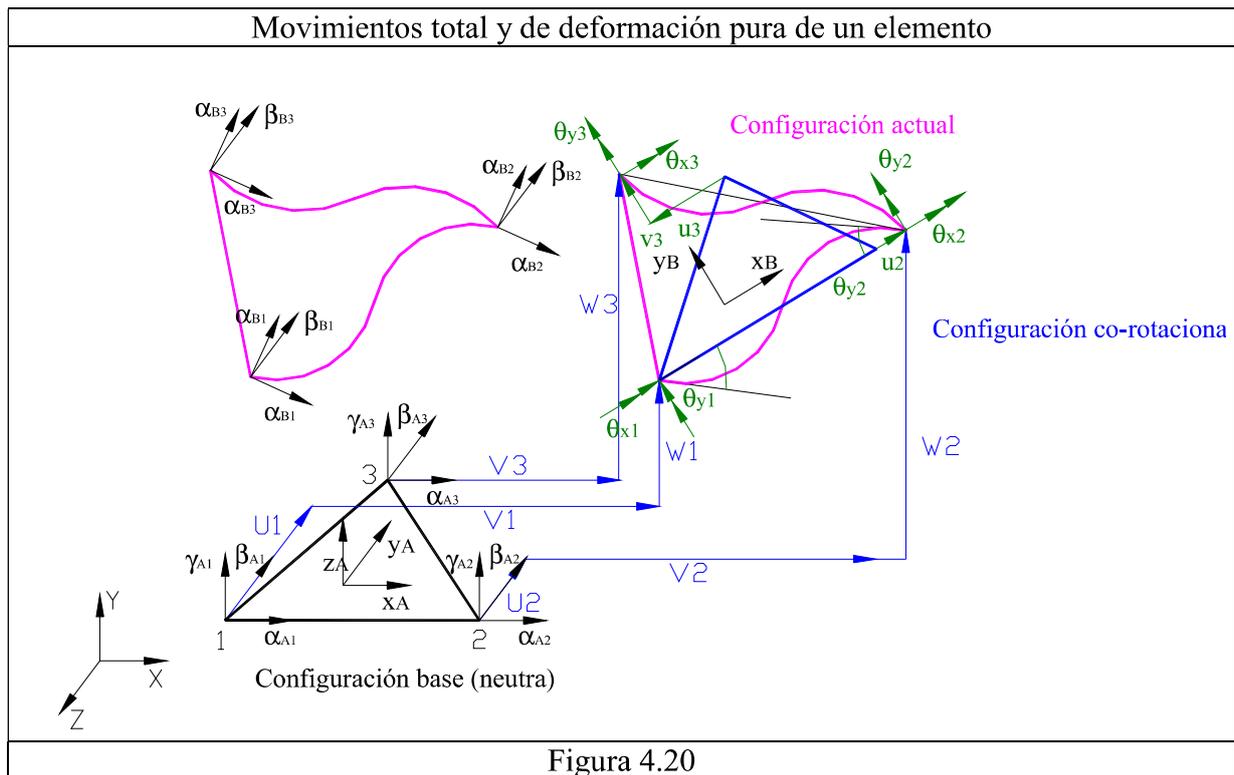
4.4.2- NO-LINEALIDAD GEOMÉTRICA CON GRANDES GIROS Y PEQUEÑAS DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS SUPERFICIALES PLANOS

Tenemos definidos en cada elemento los siguientes triedros:

- 3- Ejes locales de elemento $[\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}]$. El eje $\{x\}$ une los nudos 1 y 2, los ejes $\{y\}, \{z\}$ forman con el $\{x\}$ un sistema dextrógiro orto-normal siendo el z ortogonal al plano formado por los nudos del elemento (1,2,3). Los ejes locales de elemento sólo experimentan un giro de sólido rígido.
- 4- Los ejes locales de los nudos 1, 2 y 3 son respectivamente $[\{\alpha_1\}, \{\beta_1\}, \{\gamma_1\}]$, $[\{\alpha_2\}, \{\beta_2\}, \{\gamma_2\}]$ y $[\{\alpha_3\}, \{\beta_3\}, \{\gamma_3\}]$ que inicialmente coinciden con los del elemento.

En las iteraciones se producirán unos movimientos totales en los nudos del elemento de magnitud:

$$(U_1, V_1, W_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1}), (U_2, V_2, W_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2}) \text{ y } (U_3, V_3, W_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}, \varphi_{z3})$$



Los giros $(\varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1})$ incluyen un giro de sólido rígido y un giro asociado a la deformación del elemento.

La matriz $[R_{T1}]$ está definida por el giro $(\varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1})$, la matriz $[R_{T2}]$ por el giro $(\varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2})$ y la matriz $[R_{T3}]$ por el giro $(\varphi_{x3}, \varphi_{y3}, \varphi_{z3})$.

Los ejes locales del elemento se conocen en la configuración inicial A y en la configuración B. Están relacionados por la matriz $[R_{SR}]$:

$$[\{x_B\}, \{y_B\}, \{z_B\}] = [R_{SR}] \cdot [\{x_A\}, \{y_A\}, \{z_A\}] \dots \dots \dots (4.91)$$

que podemos expresar de forma simbólica como:

$$[T_B] = [R_{SR}] \cdot [T_A] \dots \dots \dots (4.92)$$

de donde:

$$[R_{SR}] = [T_B] \cdot [T_A]^{-1} = [T_B] \cdot [T_A]^T \dots \dots \dots (4.93)$$

siendo $[T_i]$, la matriz que contiene en cada columna los ejes locales del elemento en la configuración 'i'.

Los ejes locales se pueden determinar en la configuración A como:

El eje $\{x_A\}$ va del nudo 1 al 2:

$$\{x_A\} = \frac{1}{\sqrt{(X_{2A} - X_{1A})^2 + (Y_{2A} - Y_{1A})^2 + (Z_{2A} - Z_{1A})^2}} \begin{Bmatrix} X_{2A} - X_{1A} \\ Y_{2A} - Y_{1A} \\ Z_{2A} - Z_{1A} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (4.94)$$

El eje $\{z_A\}$ es perpendicular al plano del elemento. Se puede obtener como producto vectorial de dos vectores contenidos en ese plano: el $\{x_A\}$ y el que va del nudo 1 al 3 $\{y_{AUX}\}$

$$\{y_{AUX}\} \text{ como: } \{z_A\} = \frac{\{x_A\} \times \{y_{AUX}\}}{\|\{x_A\} \times \{y_{AUX}\}\|} \dots \dots \dots (4.95)$$

$$\text{donde } \{y_{AUX}\} = \begin{Bmatrix} X_{3A} - X_{1A} \\ Y_{3A} - Y_{1A} \\ Z_{3A} - Z_{1A} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (4.96)$$

El eje $\{y_A\}$ se obtiene del producto vectorial del eje $\{z_A\}$ por el eje $\{x_A\}$:

$$\{y_A\} = \frac{\{z_A\} \times \{x_A\}}{\|\{z_A\} \times \{x_A\}\|} \dots \dots \dots (4.97)$$

Para la configuración B se procede de modo análogo.

Los giros asociados a la deformación pura del elemento en cada nudo se pueden determinar con la expresión (4.43):

$$\text{Nudo 1 } [R_{D1}] = [R_{T1}] \cdot [R_{SR}]^T \dots \dots \dots (4.98)$$

$$\text{Nudo 2 } [R_{D2}] = [R_{T2}] \cdot [R_{SR}]^T \dots \dots \dots (4.99)$$

$$\text{Nudo 3 } [R_{D3}] = [R_{T3}] \cdot [R_{SR}]^T \dots \dots \dots (4.100)$$

Una vez se obtienen las matrices $[R_{D1}]$, $[R_{D2}]$ y $[R_{D3}]$ de los extremos de los nudos, como están asociadas a un giro pequeño, se pueden aproximar por:

$$[R_D] = [I] + [W] = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.101)$$

Los giros θ_x , θ_y son los que caracterizan el comportamiento a flexión:

El resto de los movimientos asociados a la deformación pura del elemento son los movimientos de membrana $\{u_2, u_3, v_3\}$, que se obtiene al referir el triángulo inicial y el deformado al mismo sistema de referencia (ver figura 4.21). Se obtiene que:

$$u_2 = x_{2B} - x_{2A} \dots\dots\dots(4.102)$$

$$v_3 = y_{3B} - y_{3A} \dots\dots\dots(4.103)$$

$$u_3 = x_{3B} - x_{3A} \dots\dots\dots(4.104)$$

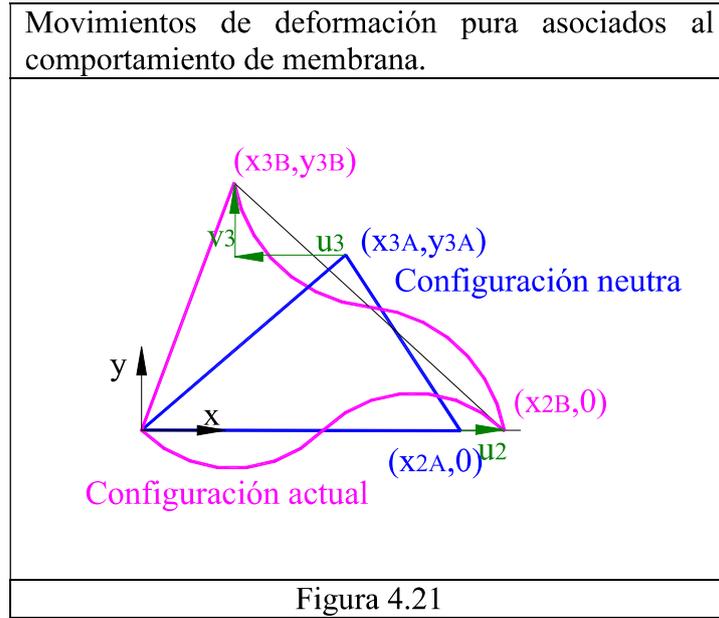
que escrito en función de los movimientos globales es:

$$u_2 = \sqrt{(X_2 + U_2 - X_1 - U_1)^2 + (Y_2 + V_2 - Y_1 - V_1)^2 + (Z_2 + W_2 - Z_1 - W_1)^2} - \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \dots\dots\dots(4.105)$$

$$u_3 = \vec{r}_{2B} \cdot \frac{\vec{r}_{1B}}{|\vec{r}_{1B}|} - \vec{r}_{2A} \cdot \frac{\vec{r}_{1A}}{|\vec{r}_{1A}|} \dots\dots\dots(4.106)$$

$$v_3 = \sqrt{\vec{r}_{2B} \cdot \vec{r}_{2B} - \left(\vec{r}_{2B} \cdot \frac{\vec{r}_{1B}}{|\vec{r}_{1B}|} \right)^2} - \sqrt{\vec{r}_{2A} \cdot \vec{r}_{2A} - \left(\vec{r}_{2A} \cdot \frac{\vec{r}_{1A}}{|\vec{r}_{1A}|} \right)^2} \dots\dots\dots(4.107)$$

donde $\vec{r}_{1A} = (X_2 - X_1 \quad Y_2 - Y_1 \quad Z_2 - Z_1)$ es el vector que va del nudo 1 al 2 y $\vec{r}_{2A} = (X_3 - X_1 \quad Y_3 - Y_1 \quad Z_3 - Z_1)$ el vector que va del nudo 1 al 3 en la configuración A. En la configuración B los vectores correspondientes con \vec{r}_{1B} y \vec{r}_{2B} .



Así pues, el movimiento que define la deformación pura del elemento, es $\{\mathbf{d}_D\} = \{\theta_{x1}, \theta_{y1}, u_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, u_3, v_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}\}$ que está relacionado con los movimientos totales del elemento $\{U_1, V_1, W_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \varphi_{z1}, U_2, V_2, W_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \varphi_{z2}, U_3, V_3, W_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}, \varphi_{z3}\}$ mediante las relaciones obtenidas, que podemos expresar como:

$$\{\mathbf{d}_D\} = \mathbf{f}(\{\mathbf{d}_T\}) \dots \dots \dots (4.108)$$

En el apartado siguiente se obtiene la relación entre las cargas en los extremos del elemento $\{\mathbf{fint}_D\} = \{M_{x1}, M_{y1}, f_{x2}, M_{x2}, M_{y2}, f_{x3}, f_{y3}, M_{x3}, M_{y3}\}$ y los movimientos de deformación pura $\{\mathbf{d}_D\} = \{\theta_{x1}, \theta_{y1}, u_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, u_3, v_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}\}$. Tanto las cargas como los movimientos están referidos a los ejes co-rotacionales del elemento. Se puede anotar como:

$$\{\mathbf{fint}_D\} = \mathbf{g}(\{\mathbf{d}_D\}) \dots \dots \dots (4.109)$$

La relación con el resto de fuerzas en los nudos del elemento, referidas también a los ejes intrínsecos, se obtiene por consideraciones de equilibrio:

$$\sum f_{xi} = f_{x1} + f_{x2} + f_{x3} = 0 \dots \dots \dots (4.110)$$

$$\sum f_{yi} = f_{y1} + f_{y2} + f_{y3} = 0 \dots \dots \dots (4.111)$$

$$\sum f_{zi} = f_{z1} + f_{z2} + f_{z3} = 0 \dots \dots \dots (4.112)$$

Tomando momentos en el nudo 1, y con los ejes indicados en la figura 4.21, cuyo origen es el nudo 1 y el eje x es el que une el nudo 1 con el 2, se tiene que:

$$\sum Mz_i = 0 \Rightarrow f_{y2} \cdot x_{2B} + f_{y3} \cdot x_{3B} - f_{x3} \cdot y_{3B} = 0 \dots \dots \dots (4.113)$$

$$\sum My_i = 0 \Rightarrow M_{y1} + M_{y2} + M_{y3} - f_{z2} \cdot x_{2B} - f_{z3} \cdot x_{3B} = 0 \dots \dots \dots (4.114)$$

$$\sum Mx_i = 0 \Rightarrow M_{x1} + M_{x2} + M_{x3} + f_{z3} \cdot y_{3B} = 0 \dots \dots \dots (4.115)$$

Despejando de las ecuaciones anteriores resulta:

$$f_{x1} = -f_{x2} - f_{x3} \dots\dots\dots(4.116)$$

$$f_{y1} = \frac{f_{x3} \cdot y_{3B} - f_{y3} \cdot x_{3B}}{x_{2B}} + f_{y3} \dots\dots\dots(4.117)$$

$$f_{y2} = \frac{f_{x3} \cdot y_{3B} - f_{y3} \cdot x_{3B}}{x_{2B}} \dots\dots\dots(4.118)$$

$$f_{z1} = \frac{M_{y1} + M_{y2} + M_{y3}}{x_{2B}} + (M_{x1} + M_{x2} + M_{x3}) \left(\frac{x_{3B}}{x_{2B} \cdot y_{3B}} - \frac{1}{y_{3B}} \right) \dots\dots\dots(4.119)$$

$$f_{z2} = \frac{M_{y1} + M_{y2} + M_{y3}}{x_{2B}} + (M_{x1} + M_{x2} + M_{x3}) \frac{x_{3B}}{x_{2B} \cdot y_{3B}} \dots\dots\dots(4.120)$$

$$f_{z3} = -\frac{M_{x1} + M_{x2} + M_{x3}}{y_{3B}} \dots\dots\dots(4.121)$$

que expresado de forma matricial es:

$$\left\{ \begin{matrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{z3} \\ M_{x3} \\ M_{y3} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_{3B}}{x_{2B}} & 1 - \frac{x_{3B}}{x_{2B}} & 0 & 0 \\ \frac{x_{3B}}{x_{2B} \cdot y_{3B}} - \frac{1}{y_{3B}} & \frac{1}{x_{2B}} & 0 & \frac{x_{3B}}{x_{2B} \cdot y_{3B}} - \frac{1}{y_{3B}} & \frac{1}{x_{2B}} & 0 & 0 & \frac{x_{3B}}{x_{2B} \cdot y_{3B}} - \frac{1}{y_{3B}} & \frac{1}{x_{2B}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_{3B}}{x_{2B}} & -\frac{x_{3B}}{x_{2B}} & 0 \\ \frac{x_{3B}}{x_{2B} \cdot y_{3B}} & \frac{1}{x_{2B}} & 0 & \frac{x_{3B}}{x_{2B} \cdot y_{3B}} & \frac{1}{x_{2B}} & 0 & 0 & \frac{x_{3B}}{x_{2B} \cdot y_{3B}} & \frac{1}{x_{2B}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{y_{3B}} & 0 & 0 & -\frac{1}{y_{3B}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{y_{3B}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ f_{x2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_{x3} \\ M_{y3} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(4.122)$$

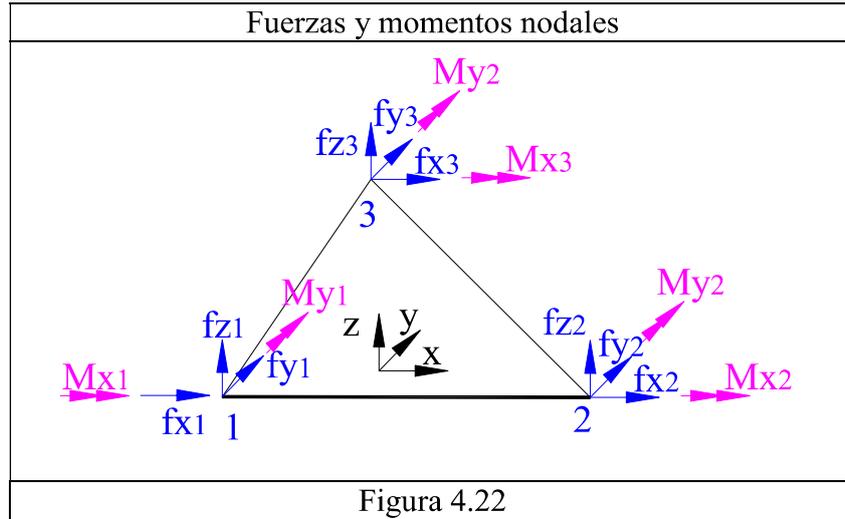


Figura 4.22

El conjunto de todas las fuerzas aplicadas en los nodos del elemento se puede anotar como:

$$\{\mathbf{fint}\}^B = [\mathbf{H}] \cdot \{\mathbf{fint}_D\} \dots\dots\dots(4.123)$$

Refiriendo las fuerzas a los ejes locales del elemento en la geometría neutra se obtiene:

$$\{\mathbf{fint}\}^A = [\mathbf{R}_{SR}] \{\mathbf{fint}\}^B \dots\dots\dots(4.124)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{x1A} \\ f_{y1A} \\ f_{z1A} \\ M_{x1A} \\ M_{y1A} \\ M_{z1A} \\ f_{x2A} \\ f_{y2A} \\ f_{z2A} \\ M_{x2A} \\ M_{y2A} \\ M_{z2A} \\ f_{x3A} \\ f_{y3A} \\ f_{z3A} \\ M_{x3A} \\ M_{y3A} \\ M_{z3A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{SR}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [R_{SR}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [R_{SR}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [R_{SR}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [R_{SR}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [R_{SR}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ 0 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ 0 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{z3} \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.125)$$

$$\{\mathbf{fint}\}^A = [\mathbf{R}_{SR}][\mathbf{H}] \cdot \{\mathbf{fint}_D\} \dots \dots \dots (4.126)$$

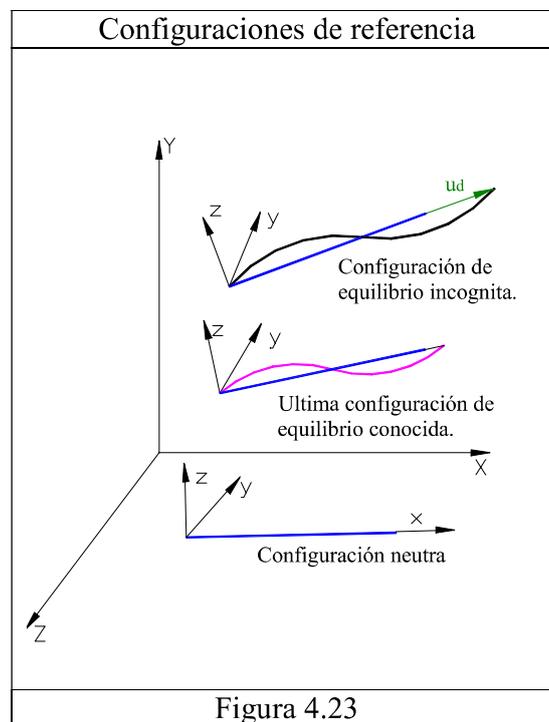
Con objeto de obtener la matriz de rigidez tangente, consistente con este método, se debe obtener las fuerzas internas referidas a los ejes locales del elemento iniciales $\{\mathbf{fint}\}^A$ y derivarlas con respecto a los movimientos totales referidos a los ejes locales del elemento inicial, obteniéndose:

$$\frac{d\{f_{int}\}^A}{d\{d_T\}} = \frac{d[R_{SR}]}{d\{d_T\}} [H] \{f_{int D}\} + [R_{SR}] [H] \frac{d\{f_{int D}\}}{d\{d_D\}} \frac{d\{d_D\}}{d\{d_T\}} \dots \dots \dots (4.127)$$

El termino $\frac{d\{f_{int D}\}}{d\{d_D\}}$ se obtiene en el apartado no-lineal mecánico. Para obtener la matriz tangente se debe calcular $\frac{d\{d_D\}}{d\{d_T\}}$, que consiste en expresar $\{d\theta_{x1}, d\theta_{y1}, du_2, d\theta_{x2}, d\theta_{y2}, du_3, dv_3, d\theta_{x3}, d\theta_{y3}\}$ en función de $\{dU_1, dV_1, dW_1, d\phi_{x1}, d\phi_{y1}, d\phi_{z1}, dU_2, dV_2, dW_2, d\phi_{x2}, d\phi_{y2}, d\phi_{z2}, dU_3, dV_3, dW_3, d\phi_{x3}, d\phi_{y3}, d\phi_{z3}\}$. También debe calcularse $\frac{d[R_{SR}]}{d\{d_T\}}$, también en función de $\{dU_1, dV_1, dW_1, d\phi_{x1}, d\phi_{y1}, d\phi_{z1}, dU_2, dV_2, dW_2, d\phi_{x2}, d\phi_{y2}, d\phi_{z2}, dU_3, dV_3, dW_3, d\phi_{x3}, d\phi_{y3}, d\phi_{z3}\}$.

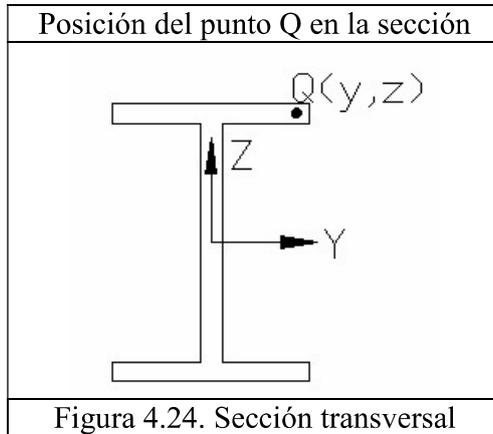
4.5 NO-LINEALIDAD MECÁNICA EN ESTRUCTURAS DE BARRAS Y ELEMENTOS SUPERFICIALES PLANOS

En la tesis se opta por la formulación co-rotacional o intrínseca, es decir, se eliminan los movimientos de sólido rígido de la barra, refiriendo los movimientos a un sistema de ejes (ejes intrínsecos o co-rotacionales) asociados a la barra y que la acompañan en su movimiento (ver figura 4.23). Con respecto a estos ejes, los movimientos de la barra son muy pequeños y se pueden utilizar las ecuaciones cinemáticas lineales al establecer las relaciones entre las deformaciones y los movimientos. La ventaja de esta formulación es que desacopla los efectos no-lineales geométricos de los mecánicos, por lo que en este apartado sólo necesitamos considerar los efectos no-lineales mecánicos.



4.5.1 NO-LINEALIDADES MECÁNICAS EN ESTRUCTURAS DE BARRAS

El método que se desarrolla considera la extensión de la plastificación a lo largo de la barra por la acción combinada de tensiones residuales longitudinales, tensiones normales debidas a esfuerzos de axil, flexión de eje y, flexión de eje z, y bimomento, así como tensiones tangenciales debidas a la torsión de Saint Venant. Se desprecia la plastificación inducida por las tensiones tangenciales asociadas al cortante y a la parte alabeada de la torsión. Nótese que en la teoría ingenieril de las vigas se desprecia la deformación asociada a estas tensiones tangenciales, por lo que no se pueden evaluar a partir de la deformación de la barra, sino que se evalúan por consideraciones de equilibrio a partir de la distribución que se obtiene de las tensiones normales, deducidas en base a ciertas hipótesis simplificadoras que permiten escribir la deformación longitudinal ϵ_x , de un punto genérico $Q(x,y,z)$ de la barra, en función de las derivadas de los movimientos de su eje de referencia:



$$\epsilon_x(x, y, z) = \frac{du_Q}{dx} = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} - \bar{\omega} \frac{d^2\theta_x}{dx^2} + \epsilon_r(x, y) = \dots\dots\dots(4.128)$$

$$\epsilon_g(x) - y \cdot \chi_z(x) + z \cdot \chi_y(x) + \bar{\omega} \cdot \chi_\omega(x) + \epsilon_r(x, y)$$

donde:

ϵ_r = deformación debida a las tensiones residuales

ϵ_g = deformación unitaria del eje de referencia

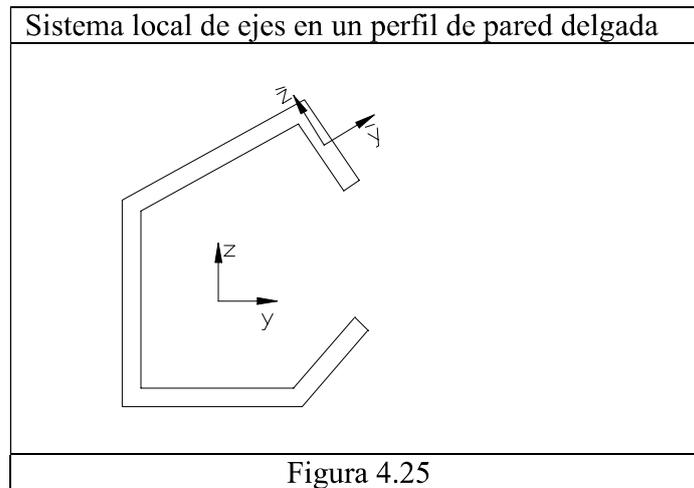
χ_z = curvatura de flexión de eje z

χ_y = curvatura de flexión de eje y

χ_ω = curvatura de torsión.

$\bar{\omega}$ = alabeo unitario.

En la figura 4.25 se muestra el sistema local $\{\bar{y}, \bar{z}\}$, de un componente plano de la sección de transversal de un perfil de pared delgada y sección abierta.



En la figura 4.26 se muestra el alabeo unitario de un perfil en doble T:

En el ala superior: $\bar{\omega} = \frac{-h \cdot y}{2}$ (4.129)

En el alma: $\bar{\omega} = 0$ (4.130)

En el ala inferior: $\bar{\omega} = \frac{h \cdot y}{2}$ (4.131)

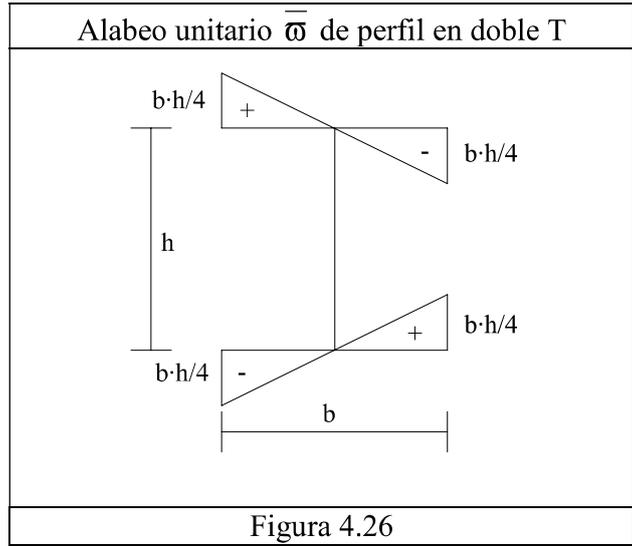


Figura 4.26

En las secciones abiertas de pared delgada (ver figura 4.27), las deformaciones inducidas por la torsión de Saint Venant se asocian a la siguiente expresión simplificada:

$$\gamma_{xz} = 2 \cdot \bar{y} \cdot \theta_x' \dots\dots\dots(4.132)$$

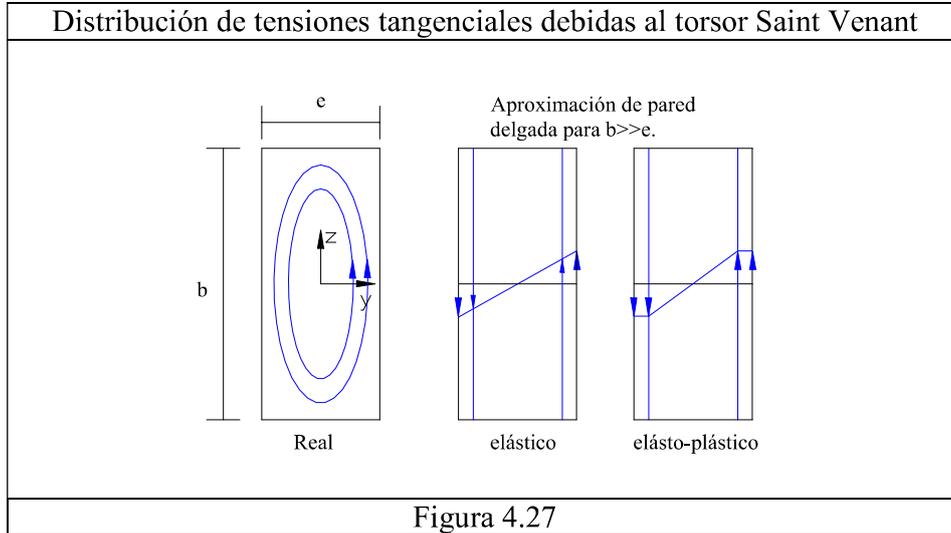
Para justificarlo, recordemos que en la torsión de Saint Venant de una sección de pared delgada se inducen tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{xz} (ver figura 4.27). Integrando las tensiones τ_{xy} y τ_{xz} se obtiene, respectivamente, la mitad del torsor. Cuando el rectángulo es estrecho $b \gg e$, las tensiones τ_{xy} son de escasa entidad y despreciables, excepto en los extremos de la sección, por su parte, las tensiones τ_{xz} mantienen la distribución lineal de la figura en toda su longitud, excepto nuevamente en los extremos del rectángulo. La aproximación de pared delgada implica aceptar que en todo el rectángulo se generan las siguientes deformaciones angulares:

$$\gamma_{xy} = 0 \dots\dots\dots(4.133)$$

$$\gamma_{xz} = 2 \cdot \bar{y} \cdot \theta_x' \dots\dots\dots(4.134)$$

Por lo que solo hay tensiones tangenciales τ_{xz} . Esta aproximación, como hemos indicado, es errónea en los extremos del rectángulo, pero de gran precisión en el resto de la sección. Nótese que las tensiones despreciadas, sin embargo, equilibran a la mitad del torsor, por lo que el torsor resultante de las tensiones τ_{xz} que consideramos es la mitad del torsor de Saint

Venant que solicita a la sección. Otra alternativa es el modelo de mitre, ver Trahair (1993), no empleado aquí.



El comportamiento elásto-plástico del acero lo modelizamos con la teoría incremental de la plasticidad, la regla de flujo plástico de Prandtl-Reuss y el criterio de plastificación de Von Mises. Se supone que el material es elástico-perfectamente-plástico, es decir, sin endurecimiento.

Cuando las tensiones (σ, τ) se mantienen en el interior de la superficie de fluencia $f = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} - \sigma_e < 0$, por ejemplo el punto J de la figura 4.28, el comportamiento es elástico y la relación entre el incremento diferencial de la tensión $d\sigma$ y el incremento diferencial de la deformación $d\varepsilon$ viene dado por:

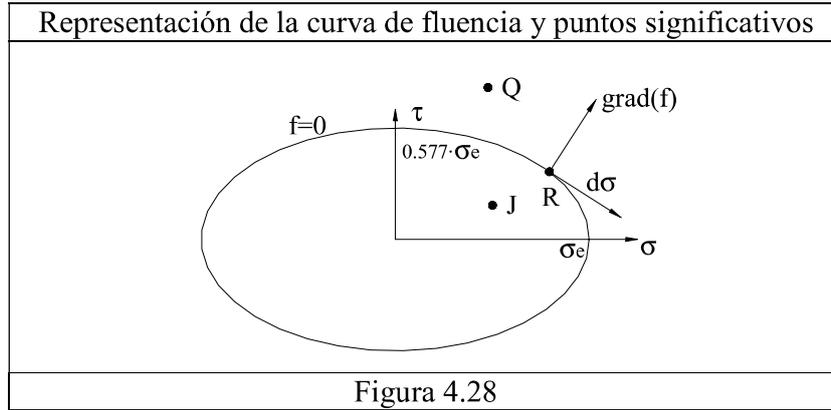
$$\begin{Bmatrix} d\sigma \\ d\tau \end{Bmatrix}_J = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_e \\ d\gamma_e \end{Bmatrix}_J = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon \\ d\gamma \end{Bmatrix}_J \dots\dots\dots(4.135)$$

que puede anotarse como $d\sigma = C \cdot d\varepsilon_e$. En este caso, además, $d\varepsilon_e = d\varepsilon$

Cuando el estado tensional se encuentra en la curva de fluencia, por ejemplo el punto R de la figura 4.28, se acepta que el incremento diferencial de la deformación consta de dos sumandos: La parte elástica y la parte plástica:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon \\ d\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_e \\ d\gamma_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\gamma_p \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.136)$$

que puede anotarse como $d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \dots\dots\dots(4.137)$



La relación entre $d\sigma$ y $d\epsilon_e$ es la citada anteriormente:

$$d\sigma = C \cdot d\epsilon_e \dots \dots \dots (4.138)$$

y como $d\epsilon_e = d\epsilon - d\epsilon_p$, se tiene:

$$d\sigma = C \cdot (d\epsilon - d\epsilon_p) \dots \dots \dots (4.139)$$

Se admite que el incremento diferencial de la deformación plástica lleva la dirección de la normal a la superficie de fluencia $f = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} - \sigma_e$ (regla de flujo plástico de Prandtl Reuss para que las deformaciones plásticas sean sin cambio de volumen), esto es:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_p \\ d\gamma_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} \end{Bmatrix} d\lambda \dots \dots \dots (4.140)$$

que puede expresarse como $d\epsilon_p = \mathbf{grad}(f) \cdot d\lambda$ (4.141)
 , donde λ es el multiplicador plástico que determina la cantidad de deformación plástica.

El escalar $d\lambda$ (es positivo). Se despeja a partir de las ecuaciones 4.137 y 4.141 e imponiendo la condición de que los vectores $\mathbf{grad}(f)$ y $d\sigma$ son ortogonales, esto es, $df = 0$.

$$\mathbf{grad}(f)^t \cdot d\sigma = 0 \dots \dots \dots (4.142)$$

de donde se deduce

$$d\lambda = \frac{\mathbf{grad}(f)^T \cdot C}{\mathbf{grad}(f)^T \cdot C \cdot \mathbf{grad}(f)} d\epsilon \dots \dots \dots (4.143)$$

y sustituyendo de nuevo en 4.137 se obtiene:

$$d\sigma = \left(C - \frac{C \cdot \mathbf{grad}(f) \cdot \mathbf{grad}(f)^T \cdot C}{\mathbf{grad}(f)^T \cdot C \cdot \mathbf{grad}(f)} \right) d\epsilon = C_{ep} \cdot d\epsilon \dots \dots \dots (4.144)$$

En nuestro caso, será:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma \\ d\tau \end{Bmatrix}_A = \left(\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} - \frac{1}{\sigma_A^2 \cdot E + 9 \cdot \tau_A^2 \cdot G} \begin{bmatrix} \sigma_A^2 \cdot E^2 & 3 \cdot \sigma_A \cdot \tau_A \cdot G \cdot E \\ 3 \cdot \sigma_A \cdot \tau_A \cdot G \cdot E & 9 \cdot \tau_A^2 \cdot G^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} d\epsilon \\ d\gamma \end{Bmatrix}_A \dots\dots\dots(4.145)$$

Esta expresión relaciona el incremento diferencial de la tensión **dσ** con el incremento diferencial de la deformación **dε**, para los estados tensionales que se encuentran sobre la superficie de fluencia (f=0).

Simo y Taylor (1985) y Runesson y Samuelsson (1985) derivaron una relación tangente consistente con el algoritmo “backward Euler return”, que mantiene la convergencia cuadrática del Newton-Raphson.

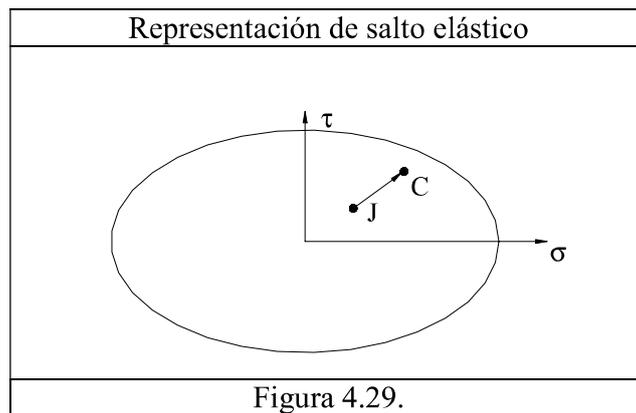
Los estados tensionales que quedan fuera de la superficie de fluencia (f>0), por ejemplo el estado Q de la figura 4.28, no tienen significado físico y no se consideran.

La teoría de la plasticidad define relaciones diferenciales entre las tensiones y las deformaciones. El problema al que nos enfrentamos es que, partiendo del estado J, al pasar al estado C, se produce un incremento finito de las deformaciones $\Delta\epsilon_{JC}$. Nuestro objetivo es calcular el verdadero incremento de las tensiones $\Delta\sigma_{JC}$ en el salto JC.

Datos: $\epsilon_J, \sigma_J, \Delta\epsilon_{JC}$
 Incógnita: $\Delta\sigma_{JC}$

Suponiendo que no hay procesos de descarga, es decir, operando con sollicitaciones que evolucionan de modo que las deformaciones siempre aumentan, se pueden presentar tres situaciones:

- a) Salto elástico.



Condiciones:

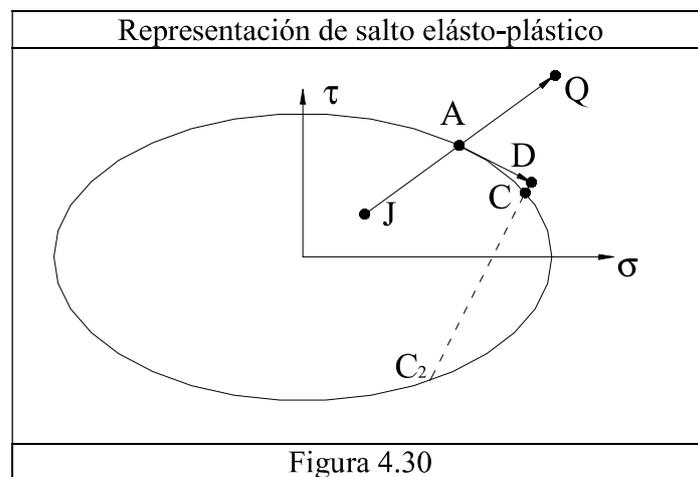
$$f_J = \sqrt{\sigma_J^2 + 3\tau_J^2} - \sigma_e < 0 \dots\dots\dots(4.146)$$

$$f_C = \sqrt{(\sigma_J + \Delta\sigma_{JC})^2 + 3(\tau_J + \Delta\tau_{JC})^2} - \sigma_e \leq 0 \dots\dots\dots(4.147)$$

Cálculo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\tau \end{Bmatrix}_{JC} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix}_{JC} \dots\dots\dots(4.148)$$

b) Salto elásto-plástico



Condiciones:

$$f_J = \sqrt{\sigma_J^2 + 3\tau_J^2} - \sigma_e < 0 \dots\dots\dots(4.149)$$

$$f_C = \sqrt{(\sigma_J + \Delta\sigma_{JC})^2 + 3(\tau_J + \Delta\tau_{JC})^2} - \sigma_e = 0 \dots\dots\dots(4.150)$$

Cálculo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\tau \end{Bmatrix}_{JQ} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix}_{JQ} \dots\dots\dots(4.151)$$

donde:

$$f_Q = \sqrt{(\sigma_J + \Delta\sigma_{JQ})^2 + 3(\tau_J + \Delta\tau_{JQ})^2} - \sigma_e > 0 \dots\dots\dots(4.152)$$

El punto A se obtiene escalando por μ el incremento de tensiones $\Delta\sigma_{JQ}$.

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\tau \end{Bmatrix}_{JA} = \mu \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\tau \end{Bmatrix}_{JQ} \dots\dots\dots(4.153)$$

y obligando a que el punto A se encuentre en la superficie de fluencia:

$$f_A = \sqrt{(\sigma_J + \mu \cdot \Delta\sigma_{JQ})^2 + 3 \cdot (\tau_J + \mu \cdot \Delta\tau_{JQ})^2} - \sigma_e = 0 \dots\dots\dots(4.154)$$

obteniéndose el valor de $\mu = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \dots\dots\dots(4.155)$

donde:

$$a = \Delta\sigma_{JQ}^2 + 3 \cdot \Delta\tau_{JQ}^2 \dots\dots\dots(4.156)$$

$$b = 2 \cdot (\sigma_J \cdot \Delta\sigma_{JQ} + 3 \cdot \tau_J \cdot \Delta\tau_{JQ}) \dots\dots\dots(4.157)$$

$$c = \sigma_J^2 + 3 \cdot \tau_J^2 - \sigma_e^2 \dots\dots\dots(4.158)$$

El incremento de tensiones del tramo plástico se obtiene realizando la integral:

$$\Delta\sigma_{AC} = \int_{\epsilon_A}^{\epsilon_C} \mathbf{C}_{ep} \cdot d\epsilon \dots\dots\dots(4.159)$$

donde $\epsilon_A = \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_A$; $\epsilon_C = \epsilon_A + \Delta\epsilon_{AC}$

Para incrementos pequeños, la expresión anterior se puede sustituir por:

$$\Delta\sigma_{AC} \approx \Delta\sigma_{AD} = \mathbf{C}_{epA} \cdot \Delta\epsilon_{AD} = \mathbf{C}_{epA} \cdot (1 - \mu) \Delta\epsilon_{JQ} \dots\dots\dots(4.160)$$

Si identificamos el punto D con el C se comete un error pequeño que nos aleja de la superficie de fluencia.

$$\Delta f = \sqrt{(\sigma_J + \Delta\sigma_{JA} + \Delta\sigma_{AD})^2 + 3 \cdot (\tau_J + \Delta\tau_{JA} + \Delta\tau_{AD})^2} - \sigma_e \neq 0 \dots\dots\dots(4.161)$$

Para regresar a la superficie de fluencia modificamos las tensiones de modo que sólo provocan deformaciones plásticas, es decir, nos movemos en la dirección normal a la superficie de fluencia. Sea (σ_C, τ_C) la tensión incógnita, se obtiene como intersección de la curva de fluencia:

$$f_C = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} - \sigma_e = 0 \dots\dots\dots(4.162)$$

y la recta normal a dicha curva que pasa por D, de forma paramétrica es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_D \\ \tau_D \end{Bmatrix} + \xi \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} \sigma_D \\ \tau_D \end{Bmatrix} + \frac{\xi}{2 \cdot \sigma_{effD}} \cdot \begin{Bmatrix} 2 \cdot \sigma_D \\ 6 \cdot \tau_D \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.163)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior resulta una ecuación de segunda segundo grado (muy similar a la empleada en el cálculo de μ), de donde se puede despejar el valor de ξ y se desecha la mas alejada del punto D, es decir, C_2 (ver figura 4.30).

Existen otros métodos como el de sub-incrementos, “backward euler return”, Runge Kutta de orden superior, que pueden mejorar el anterior (Crisfield (1991), Belytschov(2000)).

b) Salto plástico

Condiciones:

$$f_J = \sqrt{\sigma_J^2 + 3\tau_J^2} - \sigma_e = 0 \dots\dots\dots(4.164)$$

$$f_C = \sqrt{(\sigma_J + \Delta\sigma_{JC})^2 + 3(\tau_J + \Delta\tau_{JC})^2} - \sigma_e = 0 \dots\dots\dots(4.165)$$

Cálculos: se realiza de una forma similar a lo expuesto a partir del punto A del caso anterior.

Calculado (σ_C, τ_C) se puede obtener las fuerzas internas equivalentes del principio de los trabajos virtuales:

$$\delta W_{int} = \iiint_V \left\{ \begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xz} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \delta \epsilon_x \\ \delta \gamma_{xz} \end{matrix} \right\} dV \dots\dots\dots(4.166)$$

para lo que nos falta especificar $\{\delta \epsilon_x, \delta \gamma_{xz}\}$. Las deformaciones $\{\epsilon_x, \gamma_{xz}\}$ vienen dadas por:

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -y \cdot \frac{d^2}{dx^2} & z \cdot \frac{d^2}{dx^2} & -\bar{\omega} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot \bar{y} \cdot \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(4.167)$$

Los desplazamientos en función de los movimientos de deformación pura $\{\mathbf{d}_D\} = \{\theta_{y1}, \theta_{z1}, \phi_1, u_2, \theta_{xD}, \theta_{y2}, \theta_{z2}, \phi_2\}$ vienen dados por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \theta_{xD} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.168)$$

siendo las funciones de forma: $N_1 = N_5 = x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \dots\dots\dots(4.169)$

$$N_2 = N_6 = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \cdot L \left(\frac{x}{L} - 1\right) \dots\dots\dots(4.170)$$

$$N_3 = N_7 = 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \dots\dots\dots(4.171)$$

$$N_4 = \frac{x}{L} \dots\dots\dots(4.172)$$

La elección de estas funciones de forma no dará lugar a la matriz de rigidez exacta para el caso lineal (ver Anexo 1). Para obtener esta se han de emplear como funciones de forma para la torsión a las siguientes (ver Anexo 1):

$$\begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 - 2c + k \cdot L \cdot s} \begin{Bmatrix} \frac{1}{k} [(s - k \cdot L \cdot c) \cosh(k \cdot x) + (1 - c + k \cdot L \cdot s) \sinh(k \cdot x) + (1 - c)k \cdot x - (s - k \cdot L \cdot c)] \\ \frac{1}{k} [k \cdot \cosh(k \cdot x) + (c - 1) \sinh(k \cdot x) + (1 - c)k \cdot x - (s - k \cdot L)] \\ (c - 1) \cosh(k \cdot x) - s \cdot \sinh(k \cdot x) + s \cdot k \cdot x + (1 - c) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.173)$$

siendo $s = \sinh(k \cdot L)$; $c = \cosh(k \cdot L)$ y $k = \sqrt{\frac{GI_T}{EIa}}$

Las deformaciones $\{\epsilon_x, \gamma_{xz}\}$ serán pues:

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} -y \cdot N_1'' & -z \cdot N_1'' & -\bar{w} \cdot N_5'' & N_4' & -\bar{w} \cdot N_7'' & -y \cdot N_2'' & -z \cdot N_2'' & -\bar{w} \cdot N_6'' \\ 0 & 0 & 2 \cdot \bar{y} \cdot N_5' & 0 & 2 \cdot \bar{y} \cdot N_7' & 0 & 0 & 2 \cdot \bar{y} \cdot N_6' \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \theta_{xD} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \\ \phi_2 \end{matrix} \right\} \quad (4.174)$$

que se puede expresar de forma simbólica como:

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}_D\} \quad (4.175)$$

siendo, por tanto, la relación entre deformaciones y desplazamientos virtuales:

$$\{\delta\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \{\delta\mathbf{d}_D\} \quad (4.176)$$

En la expresión anterior (4.174) $\theta_{xD} = \theta_{x2} - \theta_{x1}$, es el giro de torsión relativo al extremo 1. Introduciendo la expresión de $\{\delta\varepsilon\}$, en el PTV, obtenemos las fuerzas internas asociadas a cada grado de libertad $\{M_{y1}, M_{z1}, Bi_1, fx_2, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}, Bi_2\}$

$$\iiint_V \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\gamma_{xz} \end{matrix} \right\} \cdot dV = My_1 \cdot \delta\theta_{y1} + Mz_1 \cdot \delta\theta_{z1} + Bi_1 \cdot \delta\phi_1 + fx_2 \cdot \delta u_2 + Mx_2 \cdot \delta\theta_{xD} + My_2 \cdot \delta\theta_{y2} + Mz_2 \cdot \delta\theta_{z2} + Bi_2 \cdot \delta\phi_2 \quad (4.177)$$

$$My_1 = \iiint (-y \cdot \sigma \cdot N_1'') \cdot dV \quad (4.178)$$

$$Mz_1 = \iiint (-z \cdot \sigma \cdot N_1'') \cdot dV \quad (4.179)$$

$$Bi_1 = \iiint (-\bar{w} \cdot \sigma \cdot N_5'' + 2 \cdot \bar{y} \cdot \tau \cdot N_5') \cdot dV \quad (4.180)$$

$$fx_2 = \iiint (\sigma \cdot N_4') \cdot dV \quad (4.181)$$

$$Mx_2 = \iiint (-\bar{w} \cdot \sigma \cdot N_7'' + 2 \cdot \bar{y} \cdot \tau \cdot N_7') \cdot dV \quad (4.182)$$

$$My_2 = \iiint (-y \cdot \sigma \cdot N_2'') \cdot dV \quad (4.183)$$

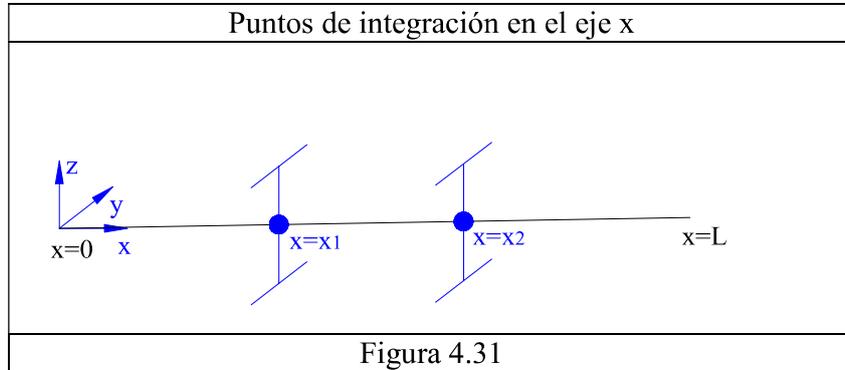
$$Mz_2 = \iiint (-z \cdot \sigma \cdot N_2'') \cdot dV \quad (4.184)$$

$$Bi_2 = \iiint (-\bar{w} \cdot \sigma \cdot N_6'' + 2 \cdot \bar{y} \cdot \tau \cdot N_6') \cdot dV \quad (4.185)$$

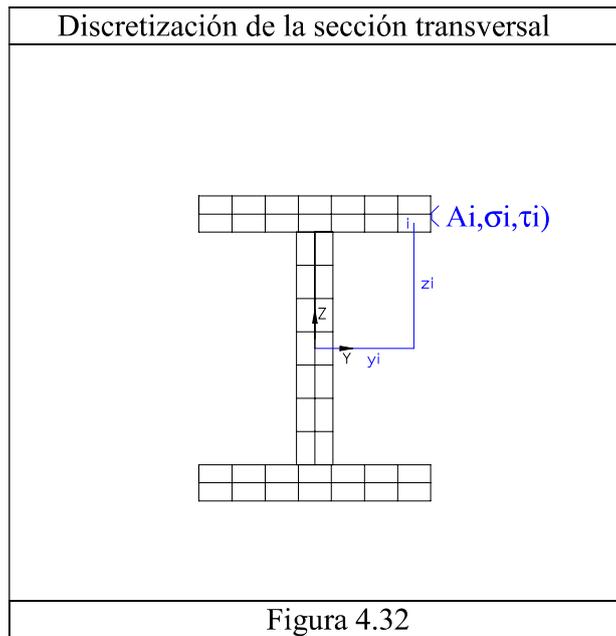
Las integraciones anteriores se realizan de forma numérica. Se suelen emplear 2 o 3 puntos de integración en la dirección x. Cuando se utilizan dos puntos de integración se seleccionan en las abscisas:

$$x_1 = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$x_2 = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



La sección transversal se discretiza en la forma indicada en la figura 4.32, evaluando el valor que toma la función en el centro de gravedad de las ‘n’ sub-áreas en que se descompone.



$$\iiint f(x, y, z) dV = \frac{L}{2} \left[\iint_{A1} f(x_1, y, z) dA + \iint_{A2} f(x_2, y, z) dA \right] = \frac{L}{2} \left(\sum_{i=1}^n f(x_1, y_i, z_i) A_i + \sum_{j=1}^n f(x_2, y_j, z_j) A_j \right) \dots\dots\dots(4.186)$$

Cabe recordar que, tanto $\bar{\omega}$ como \bar{y} , son función de (y,z). Así por ejemplo, para el cálculo de M_{y1} :

$$My_1 = \iiint_V (-y \cdot \sigma \cdot N_1'') dV = \iiint_V \left(y \cdot \sigma \cdot \left(\frac{4}{L} - 6 \frac{x}{L^2} \right) \right) dV = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sigma_i \cdot A_i + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \sum_{j=1}^n y_j \cdot \sigma_j \cdot A_j \right) \dots \dots \dots (4.187)$$

Para el cálculo de la matriz de rigidez, que nos relaciona diferenciales de fuerzas con diferenciales de movimientos, debemos derivar* (variación de gateaux) la expresión del PTV con respecto a los movimientos.

$$\iiint_V \left\{ \delta \varepsilon_x \quad \delta \gamma_{xz} \right\} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dV = \{ \delta \mathbf{d} \}_{1 \times 8} \iiint_V [B]^T_{8 \times 2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dV = \{ \delta \mathbf{d} \}_{1 \times 8} \{ \mathbf{f}_{int} \}_{8 \times 1} \dots \dots \dots (4.188)$$

$$[K] = \frac{d\mathbf{f}_{int}}{d\mathbf{d}} = \iiint_V [B]^T_{8 \times 2} \begin{pmatrix} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} & \frac{d\sigma}{d\gamma} \\ \frac{d\tau}{d\varepsilon} & \frac{d\tau}{d\gamma} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon \\ d\gamma \end{Bmatrix} dV = \iiint_V [B]^T_{8 \times 2} \cdot (D)_{2 \times 2} \cdot [B]_{2 \times 8} dV \dots (4.189)$$

donde [D] es la matriz tangente constitutiva cuyo valor será C ó Cep, según el punto se encuentre en comportamiento elástico o elásto-plástico (sobre la superficie de fluencia). Para el cálculo de la matriz de rigidez se emplea la misma discretización que para el cálculo de las fuerzas internas.

La matriz [B^T][D][B] es:

$$\begin{bmatrix} D_a a_1^2 & D_a a_1 a_2 & D_a a_1 a_3 & D_a a_1 a_4 & D_a a_1 a_5 & D_a a_1 a_6 & D_a a_1 a_7 & D_a a_1 a_8 \\ & & + D_c a_1 b_1 & & + D_c a_1 b_2 & & & + D_c a_1 b_3 \\ & D_a a_2^2 & D_a a_2 a_3 & D_a a_2 a_4 & D_a a_2 a_5 & D_a a_2 a_6 & D_a a_2 a_7 & D_a a_2 a_8 \\ & & + D_c a_2 b_1 & & + D_c a_2 b_2 & & & + D_c a_2 b_3 \\ & & D_a a_3^2 + D_b b_1^2 & D_a a_4 a_3 & D_a a_3 a_5 + D_b b_1 b_2 & D_a a_3 a_6 & D_a a_3 a_7 & D_a a_3 a_8 + D_b b_1 b_3 \\ & & + 2D_c a_3 b_1 & + D_c a_4 b_1 & + D_c (a_3 b_2 + a_5 b_1) & + D_c a_6 b_1 & + D_c a_7 b_1 & + D_c (a_3 b_3 + a_8 b_1) \\ & & & D_a a_4^2 & D_a a_4 a_5 & D_a a_4 a_6 & D_a a_4 a_7 & D_a a_4 a_8 \\ & & & & + D_c a_4 b_2 & & & + D_c a_4 b_3 \\ & & & & D_a a_5^2 + D_b b_2^2 & D_a a_5 a_6 & D_a a_5 a_7 & D_a a_5 a_8 + D_b b_2 b_3 \\ & & & & + 2D_c a_5 b_2 & + D_c a_6 b_2 & + D_c a_7 b_2 & + D_c (a_5 b_3 + a_8 b_2) \\ & & & & & & & D_a a_6 a_8 \\ & & & & & D_a a_6^2 & D_a a_6 a_7 & + D_c a_6 b_3 \\ & & & & & & & D_a a_7 a_8 \\ & & & & & & D_a a_7^2 & + D_c a_7 b_3 \\ & & & & & & & D_a a_8^2 + D_b b_3^2 \\ & & & & & & & + 2D_c a_8 b_3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4.190)$$

donde [B] está definida por la expresión (4.174) y [D] está definida en (4.135) o (4.145). Estas expresiones se han escrito en forma simbólica como:

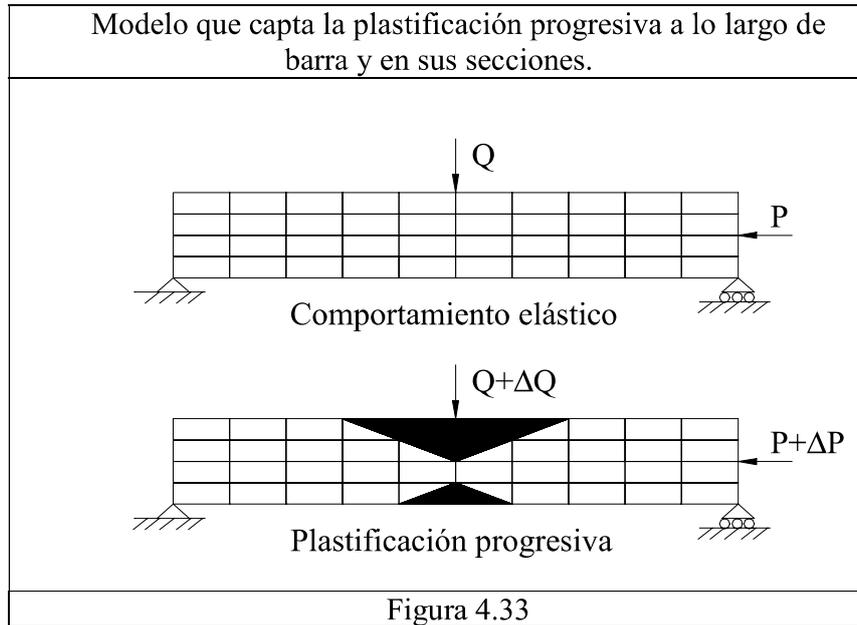
$$[B] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.191)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_a & D_c \\ D_c & D_b \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.192)$$

suponiendo un comportamiento lineal mecánico y utilizando las funciones de forma “exactas” para el comportamiento a torsión (4.173) resulta:

$$\left\{ \begin{matrix} M_{y1} \\ M_{z1} \\ B_{i1} \\ f_{x2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \\ B_{i2} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{4EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIy}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EIz}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \rho \frac{kL-s}{k} & 0 & \rho(1-c) & 0 & 0 & \rho \frac{s-kL}{k} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(1-c) & 0 & \rho \cdot s \cdot k & 0 & 0 & \rho \cdot (1-c) \\ \frac{2EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EIz}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \rho \frac{s-kL}{k} & 0 & \rho(1-c) & 0 & 0 & \rho \frac{kL-s}{k} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \theta_{xD} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \\ \phi_2 \end{matrix} \right\} \quad (4.193)$$

donde $k = \sqrt{\frac{G \cdot It}{E \cdot Ia}}$, $c = \cosh(k \cdot L)$, $s = \sinh(k \cdot L)$ y $\rho = \frac{G \cdot It}{2 - 2 \cdot c + k \cdot L \cdot s}$



4.5.1.1 MÉTODO DE LAS RÓTULAS PLÁSTICAS Y MEJORAS

El método que acabamos de exponer requiere un gran esfuerzo numérico para considerar la extensión de la plastificación (figura 4.33) a lo largo de la barra. Normalmente se recurre a aproximaciones más simples.

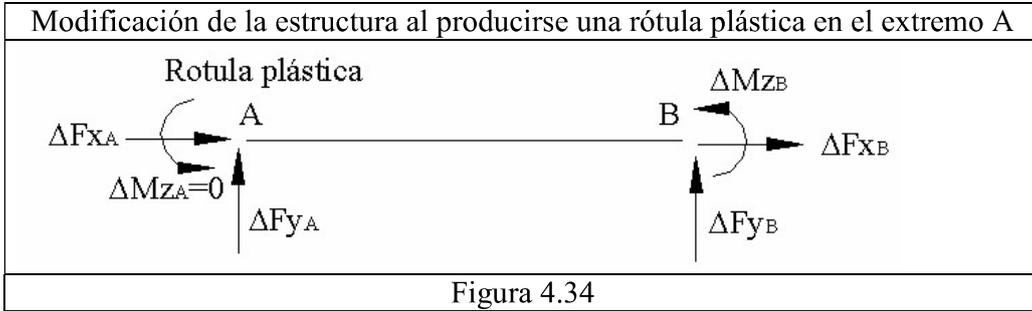
El método más aceptado es el de las rótulas plásticas, que ya fue programado por J. Michael Davies et al. en los años 60. Son modelos de barras, que no detallan aspectos parciales de la sección, en los que la ley tensión deformación del punto, se sustituye por una ley elasto-plástica esfuerzo-deformación generalizada de la sección.

La diferencia fundamental con el modelo visto anteriormente es que las zonas plásticas se localizan en rótulas plásticas. El análisis se hace paso a paso suponiendo un comportamiento mecánico lineal en cada salto y modificando la naturaleza de la estructura a medida que se van formando las sucesivas rotulas plásticas. El cálculo conduce finalmente a la carga de rotura rígido-plástica.

La relación entre incrementos de fuerzas y desplazamientos en una barra genérica de un entramado plano viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{x_A} \\ \Delta F_{y_A} \\ \Delta M_{z_A} \\ \Delta F_{x_B} \\ \Delta F_{y_B} \\ \Delta M_{z_B} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \Delta u_A \\ \Delta v_A \\ \Delta \theta_{z_A} \\ \Delta u_B \\ \Delta v_B \\ \Delta \theta_{z_B} \end{Bmatrix} + \{\Delta F_{EMP}\} \dots \dots \dots (4.194)$$

siendo $[K]$ la matriz de rigidez y $\{\Delta F_{EMP}\}$ el incremento de las fuerzas de empotramiento perfecto.

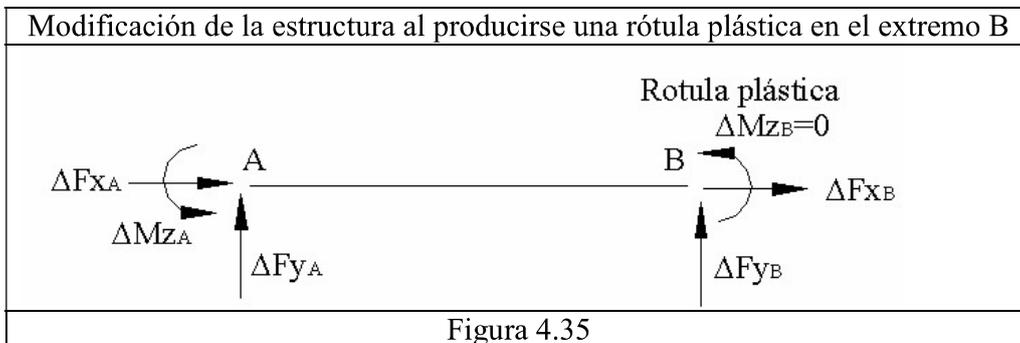


Cuando se forma una rótula plástica en un extremo de una barra, por ejemplo, el extremo A de la figura 4.34, se supone que la sección gira como si fuera una rótula de modo que $\Delta M_{zA}=0$. Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene:

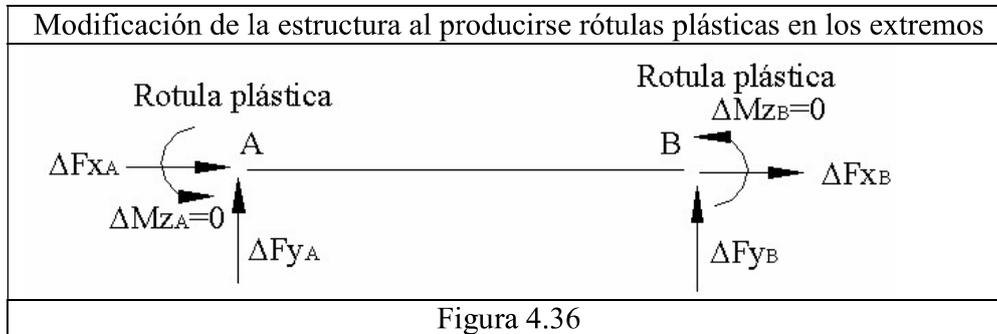
$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{x_A} \\ \Delta F_{y_A} \\ 0 \\ \Delta F_{x_B} \\ \Delta F_{y_B} \\ \Delta M_{z_B} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \Delta u_A \\ \Delta v_A \\ \Delta \theta_{z_A} \\ \Delta u_B \\ \Delta v_B \\ \Delta \theta_{z_B} \end{Bmatrix} + \{\Delta F_{EMP}\} \dots \dots \dots (4.195)$$

Se puede condensar estáticamente el grado de libertad $\Delta \theta_{zA}$, siendo $[K^*]$ la matriz de rigidez condensada y $\{\Delta F_{EMP}^*\}$ el incremento de fuerzas de empotramiento perfecto condensadas, lo que conduce a:

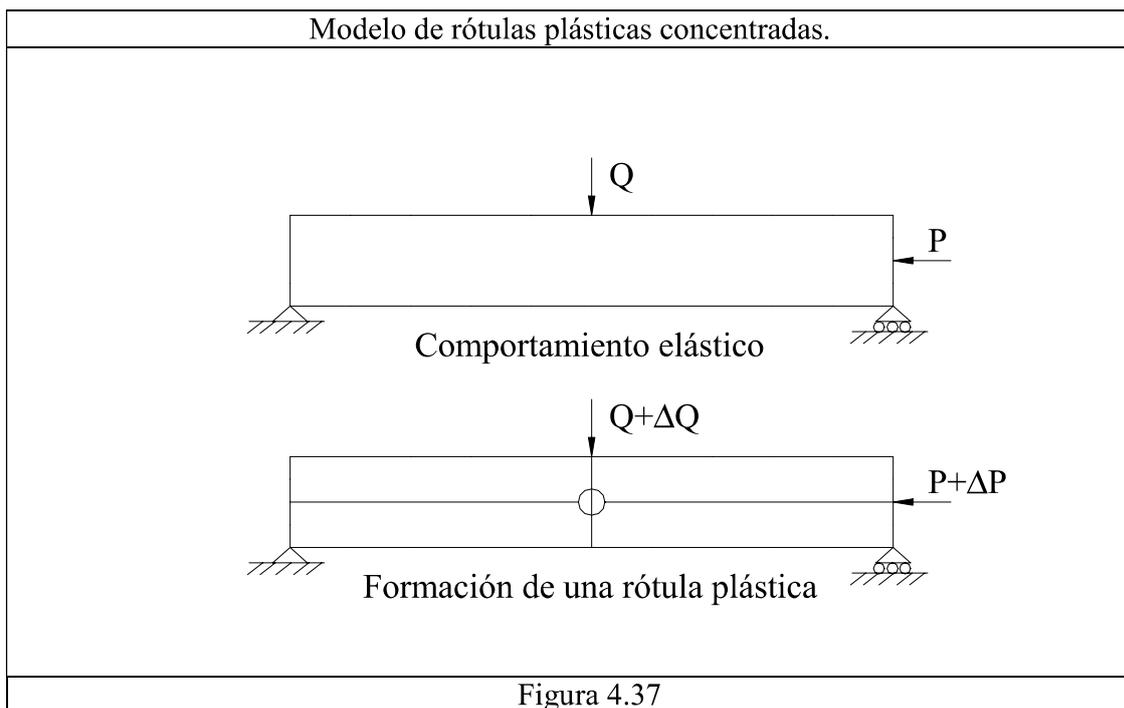
$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{x_A} \\ \Delta F_{y_A} \\ \Delta F_{x_B} \\ \Delta F_{y_B} \\ \Delta M_{z_B} \end{Bmatrix} = [K^*] \begin{Bmatrix} \Delta u_A \\ \Delta v_A \\ \Delta u_B \\ \Delta v_B \\ \Delta \theta_{z_B} \end{Bmatrix} + \{\Delta F_{EMP}^*\} \dots \dots \dots (4.196)$$



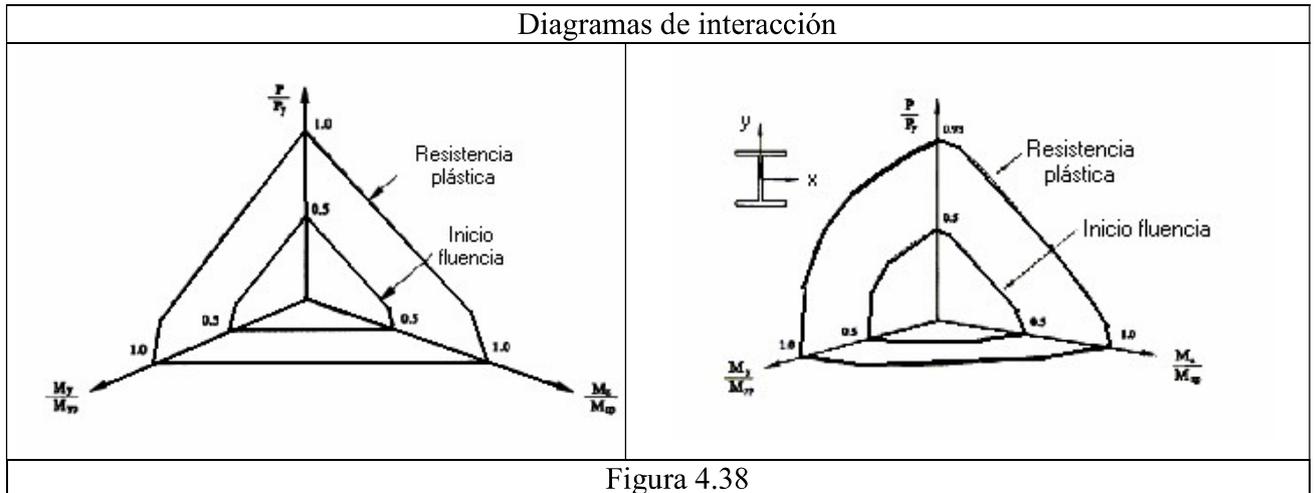
De forma análoga se procede cuando se forma una rótula plástica en B figura 4.35, $\Delta M_{zB}=0$ y se condensa estáticamente el grado de libertad $\Delta\theta_{zB}$. Cuando se forman rótulas con curvatura de signo contrario en ambos extremos (figura 4.36).



$\Delta M_{zA}=0$ y $\Delta M_{zB}=0$ y se condensan estáticamente los grados de libertad $\Delta\theta_{zB}$ y $\Delta\theta_{zA}$. En este método hay que contemplar una limitación de giros en las rótulas plásticas dada por problemas de ductilidad (abolladura).



Las rótulas plásticas se forman por la acción combinada de los esfuerzos que solicitan a la rebanada. Los criterios más utilizados (ver figura 4,38) son los propuestos por Orbison (1982) y la AISC (basados en los estudios de Kanchanalai).



Según Orbison, la formación de una rotula plástica en un perfil en doble te viene dada por la condición $\alpha=1$ en las expresiones:

$$p = \frac{P}{P_y} ; m_z = \frac{M_z}{M_{zp}} \text{ (eje fuerte)} ; m_y = \frac{M_y}{M_{yp}} ;$$

$$\alpha = 1.15p^2 + m_z^2 + m_y^4 + 3.67 \cdot p^2 \cdot m_z^2 + 3p^6 m_y^2 + 4.65m_z^4 m_y^2 \dots\dots\dots(4.197)$$

Según la AISC, la formación de una rotula plástica en un perfil en doble te viene dada por la condición $\alpha=1$, en las expresiones:

$$\alpha = \frac{P}{P_y} + \frac{8 M_y}{9 M_{yp}} + \frac{8 M_z}{9 M_{zp}} \text{ si } \frac{P}{P_y} \geq \frac{2 M_y}{9 M_{yp}} + \frac{2 M_z}{9 M_{zp}} \dots\dots\dots(4.198)$$

$$\alpha = \frac{P}{2 \cdot P_y} + \frac{M_y}{M_{yp}} + \frac{M_z}{M_{zp}} \text{ si } \frac{P}{P_y} < \frac{2 M_y}{9 M_{yp}} + \frac{2 M_z}{9 M_{zp}} \dots\dots\dots(4.199)$$

Chen W.F. y Chan S. L. propusieron en (1995) un elemento para el comportamiento inelástico que admite la formación de rótulas plástica tanto en el centro del elemento como en sus extremos.

Se han formulado mejoras del método de las rótulas plásticas que capten la plastificación progresiva. Destacan las propuestas de Liew y Tang (1998), Kim y Chen (1996), Clarke et al. (1992) y Orbison (1982). A continuación se describe la propuesta de Kim que incorpora, a su vez, la no-linealidad geométrica a través de las funciones de estabilidad.

Para considerar la existencia de tensiones residuales utiliza el modulo de elasticidad tangente “ficticio” (E_T) propuesto por la CRC (Column Research Council):

$$E_T = E, \text{ si } P \leq 0.5 \cdot A \cdot \sigma_e \dots\dots\dots(4.200)$$

$$E_T = E \frac{4 \cdot P}{A \cdot \sigma_e} \left(1 - \frac{P}{A \cdot \sigma_e} \right), \text{ si } P > 0.5 \cdot A \cdot \sigma_e \dots\dots\dots(4.201)$$

Además, para considerar la existencia de imperfecciones geométricas, lo corrige, con un coeficiente $\xi_i=0.85$:

$$E_T = E \cdot \xi_i, \text{ si } P \leq 0.5 \cdot A \cdot \sigma_e \dots\dots\dots(4.202)$$

$$E_T = E \cdot \xi_i \frac{4 \cdot P}{A \cdot \sigma_e} \left(1 - \frac{P}{A \cdot \sigma_e} \right), \text{ si } P > 0.5 \cdot A \cdot \sigma_e \dots\dots\dots(4.203)$$

Para tener en consideración la reducción de rigidez debida a la existencia simultánea de axil y flexión, es necesario un modelo de reducción gradual de la rigidez. Este modelo capta la plastificación progresiva a modo de conexión semi-rígida, siendo la rigidez de esta conexión, variable a medida que progresa la plastificación. Inicialmente, en comportamiento elástico $\alpha < 0.5$, se comporta como una conexión rígida y en el momento que $\alpha > 0.5$, la conexión pasa a considerarse como semi-rígida. Cuando se alcanza el valor de $\alpha=1$ en un extremo este pasa a comportarse como una rótula plástica y por tanto a nivel incremental su respuesta es la de una rótula en la que existe una desconexión al giro, no pudiendo producirse ningún incremento adicional del momento.

La forma matemática de expresar el modelo de degradación (parabólico) debido a la plastificación en cada uno de los extremos de la barra es:

$$\eta = 1 \text{ si } \alpha \leq 0.5 \dots\dots\dots(4.204)$$

$$\eta = 4 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \text{ si } \alpha > 0.5 \dots\dots\dots(4.205)$$

donde el valor de η se obtiene para los extremos A y B, el coeficiente α depende del criterio de plastificación seleccionado, Orbison, AISC u otros más adecuados en función del tipo de sección.

La relación de las fuerzas con los movimientos es a través de la matriz de rigidez en la que incorporan la no-linealidad geométrica con funciones de estabilidad. A continuación se muestra la relación entre fuerzas y desplazamientos de deformación pura cuando la rigidez al alabeo es despreciable.

$$\begin{Bmatrix} f_{x2} \\ M_{y1} \\ M_{y2} \\ M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_T \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} \frac{E_T \cdot I_y}{L} & \rho_{31} \frac{E_T \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{31} \frac{E_T \cdot I_y}{L} & \rho_{21} \frac{E_T \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{12} \frac{E_T \cdot I_z}{L} & \rho_{32} \frac{E_T \cdot I_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{32} \frac{E_T \cdot I_z}{L} & \rho_{22} \frac{E_T \cdot I_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_t}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{xD} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.206)$$

donde $\rho_{1i} = \eta_A \left(S_{1i} - \frac{S_{2i}^2}{S_{1i}} (1 - \eta_B) \right)$; $\rho_{2i} = \eta_B \left(S_{1i} - \frac{S_{2i}^2}{S_{1i}} (1 - \eta_A) \right)$;
 $\rho_{3i} = \eta_A \cdot \eta_B \cdot S_{2i}$; $S_{1i} = \frac{[k_i \cdot \cos(k_i) - \sin(k_i)] \cdot k_i}{[-2 + k_i \cdot \sin(k_i) + 2 \cdot \cos(k_i)]}$;
 $S_{2i} = \frac{-k_i \cdot [\text{sen}(k_i) - k_i]}{[-2 + k_i \cdot \sin(k_i) + 2 \cdot \cos(k_i)]}$; $k_1 = L \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_y}}$; $k_2 = L \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I_z}}$

Otros aspectos significativos sobre este método se pueden consultar en el libro de W. F. Chen (1997).

4.5.2 NO-LINEALIDADES MECÁNICAS EN ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS SUPERFICIALES PLANOS

En la teoría ingenieril de los elementos superficiales planos, se desprecia la deformación asociada a las tensiones tangenciales inducidas por los esfuerzos cortantes. Así pues, estas tensiones no se pueden evaluar a partir de la deformación de la placa, sino que se calculan por consideraciones de equilibrio.

En un elemento superficial plano las deformaciones de un punto genérico Q vienen dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \varepsilon_{xr}(x, y, z) \dots \dots \dots (4.208)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \varepsilon_{yr}(x, y, z) \dots \dots \dots (4.209)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - 2 \cdot z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + \varepsilon_{xyr}(x, y, z) \dots \dots \dots (4.210)$$

donde:

$\{\varepsilon_{xr}, \varepsilon_{yr}, \varepsilon_{xyr}\}$ = deformación debida a las tensiones residuales

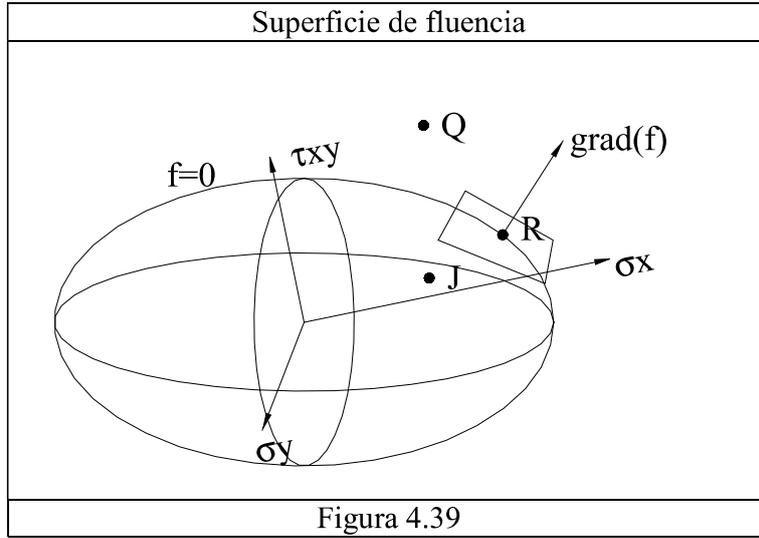
La expresión anterior se basa en la hipótesis de Love-Kirchoff :“Las normales al plano medio del elemento antes de la deformación, permanecen normales al plano medio deformado y son inextensibles”, lo que implica despreciar las deformaciones asociadas a los esfuerzos cortantes.

El comportamiento elasto-plástico del acero lo modelizamos con la teoría incremental de la plasticidad, la regla de flujo plástico de Prandtl-Reuss y el criterio de plastificación de Von Mises. Se supone que el material es elástico-perfectamente-plástico, es decir, sin endurecimiento.

Cuando las tensiones $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ se mantienen en el interior de la superficie de fluencia $f = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2)} - \sigma_e < 0$, por ejemplo el punto J de la figura 4.39, el comportamiento es elástico y la relación entre el incremento diferencial de la tensión $d\sigma$ y el incremento diferencial de la deformación $d\varepsilon$ viene dado por:

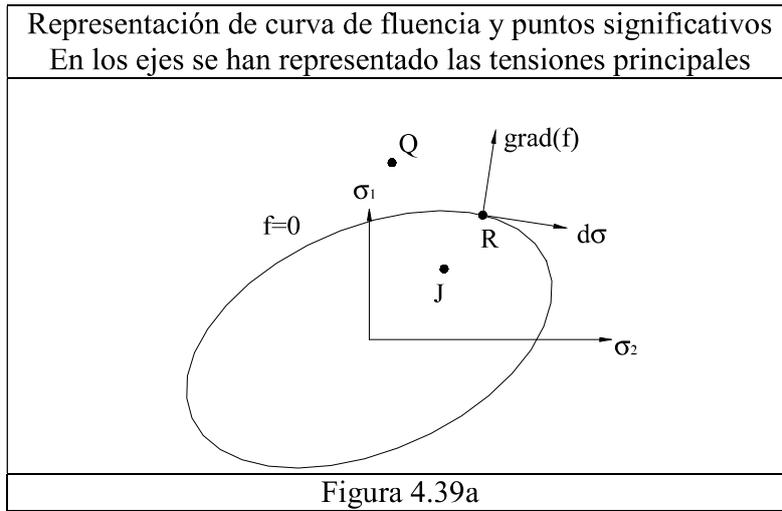
$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix}_J = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix}_J \dots \dots \dots (4.211)$$

que puede anotarse como $d\sigma = C \cdot d\varepsilon$.



En tensiones principales la curva de fluencia viene definida por:

$$f = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2)} - \sigma_e = 0 \dots\dots\dots(4.212)$$



Cuando el estado tensional se encuentra en la curva de fluencia, por ejemplo el punto R de la figura 4.39a, se acepta que el incremento diferencial de la deformación consta de dos sumandos: La parte elástica y la parte plástica:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_{xe} \\ d\epsilon_{ye} \\ d\gamma_{xye} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\epsilon_{xp} \\ d\epsilon_{yp} \\ d\gamma_{xyp} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4.213)$$

que puede anotarse como $d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p \dots\dots\dots(4.214)$

La relación entre $d\sigma$ y $d\epsilon_e$ es la citada anteriormente:

$$d\sigma = C \cdot d\epsilon_e \dots\dots\dots(4.215)$$

y como $d\boldsymbol{\varepsilon}_e = d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_p$, se tiene:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_p) \dots \dots \dots (4.216)$$

Se admite que el incremento diferencial de la deformación plástica lleva la normal a la superficie de fluencia $f = \sigma_{eff} - \sigma_e = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2)} - \sigma_e$, (regla de flujo de Prandtl Reuss para que las deformaciones plásticas sean sin cambio de volumen), esto es:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xp} \\ d\varepsilon_{yp} \\ d\gamma_{xyp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \end{Bmatrix} d\lambda = \frac{d\lambda}{2 \cdot \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2)}} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma_x - \sigma_y \\ 2 \cdot \sigma_y - \sigma_x \\ 6 \cdot \tau_{xy} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4.217)$$

que puede expresarse como $d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{grad}(\mathbf{f}) \cdot d\lambda$ (4.218)

donde λ es el multiplicador plástico que determina la cantidad de deformación plástica.

El escalar $d\lambda$ se despeja a partir de las ecuaciones 4.214 y 4.218 e imponiendo la condición de que los vectores $\mathbf{grad}(\mathbf{f})$ y $d\boldsymbol{\sigma}$ son ortogonales, esto es, $df = 0$.

$$\mathbf{grad}(\mathbf{f})^t \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \dots \dots \dots (4.219)$$

de donde se deduce

$$d\lambda = \frac{\mathbf{grad}(\mathbf{f})^T \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{grad}(\mathbf{f})^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{f})} d\boldsymbol{\varepsilon} \dots \dots \dots (4.220)$$

$$d\lambda = \frac{\frac{1}{2 \cdot \sigma_{eff}} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma_x - \sigma_y \\ 2 \cdot \sigma_y - \sigma_x \\ 6 \cdot \tau_{xy} \end{pmatrix}^T \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}}{\frac{1}{2 \cdot \sigma_{eff}} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma_x - \sigma_y \\ 2 \cdot \sigma_y - \sigma_x \\ 6 \cdot \tau_{xy} \end{pmatrix}^T \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot \sigma_{eff}} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma_x - \sigma_y \\ 2 \cdot \sigma_y - \sigma_x \\ 6 \cdot \tau_{xy} \end{pmatrix}} \dots \dots \dots (4.221)$$

y sustituyendo de nuevo en 4.215, se obtiene:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{f})^T \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{grad}(\mathbf{f})^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{f})} \right) d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{ep} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \dots \dots \dots (4.222)$$

en nuestro caso, será:

$$C_{ep} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot \sigma_{eff}} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma_x - \sigma_y \\ 2 \cdot \sigma_y - \sigma_x \\ 6 \cdot \tau_{xy} \end{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot \sigma_{eff}} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma_x - \sigma_y \\ 2 \cdot \sigma_y - \sigma_x \\ 6 \cdot \tau_{xy} \end{pmatrix}^T \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot \sigma_{eff}} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma_x - \sigma_y \\ 2 \cdot \sigma_y - \sigma_x \\ 6 \cdot \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

resultando:

$$C_{ep} = [C] + \rho \begin{pmatrix} (\sigma_x(\nu-2) + \sigma_y(1-2\nu))^2 & (\sigma_x(2-\nu) + \sigma_y(2\nu-1))(\sigma_y(2-\nu) + \sigma_x(2\nu-1)) & 3((\nu-2)\sigma_x + (1-2\nu)\sigma_y)\tau_{xy}(\nu-1) \\ \text{simetrica} & (\sigma_y(\nu-2) + \sigma_x(1-2\nu))^2 & 3((\nu-2)\sigma_y + (1-2\nu)\sigma_x)\tau_{xy}(\nu-1) \\ \text{simetrica} & \text{simetrica} & 9\tau_{xy}^2(\nu-1)^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4.223)$$

donde $\rho = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{(4\nu-5)(\sigma_x + \sigma_y)^2 + (18\nu-18)\tau_{xy}^2}$

Esta expresión relaciona el incremento diferencial de la tensión **dσ** con el incremento diferencial de la deformación **dε**, para los estados tensionales que se encuentran sobre la superficie de fluencia (f=0).

La teoría de la plasticidad define relaciones diferenciales entre las tensiones y las deformaciones. El problema al que nos enfrentamos es que, partiendo del estado J, al pasar al estado C se produce un incremento finito de las deformaciones **Δε_{JC}**. Nuestro objetivo es calcular el verdadero incremento de las tensiones **Δσ_{JC}** en el salto JC.

Datos: **ε_J** , **σ_J** , **Δε_{JC}**
 Incógnita: **Δσ_{JC}**

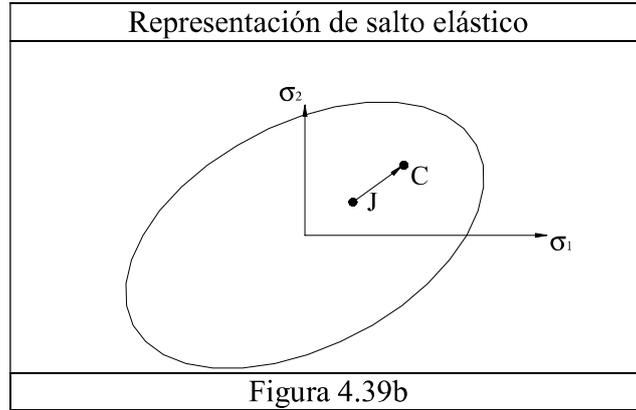
Suponiendo que no hay procesos de descarga, es decir, operando con sollicitaciones que evolucionan de modo que las deformaciones siempre aumentan, se pueden presentar tres situaciones:

- a) Salto elástico.

Condiciones:

$$f_J = \sqrt{(\sigma_{xJ}^2 + \sigma_{yJ}^2 - \sigma_{xJ} \cdot \sigma_{yJ} + 3 \cdot \tau_{xyJ}^2)} - \sigma_e < 0 \dots\dots\dots(4.224)$$

$$f_C = \sqrt{((\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJC})^2 + (\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJC})^2 - (\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJC})(\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJC}) + 3 \cdot (\tau_{xJ} + \Delta\tau_{xJC})^2)} - \sigma_e \leq 0 \dots\dots\dots(4.225)$$



Cálculo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix}_{JC} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{JC} \dots\dots\dots(4.226)$$

b) Salto elasto-plástico

Condiciones:

$$f_J = \sqrt{(\sigma_{xJ}^2 + \sigma_{yJ}^2 - \sigma_{xJ} \cdot \sigma_{yJ} + 3 \cdot \tau_{xyJ}^2)} - \sigma_e < 0 \dots\dots\dots(4.227)$$

$$f_C = \sqrt{((\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJC})^2 + (\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJC})^2 - (\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJC})(\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJC}) + 3 \cdot (\tau_{xJ} + \Delta\tau_{xJC})^2)} - \sigma_e = 0 \dots\dots\dots(4.228)$$

Cálculo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix}_{JQ} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{JQ} \dots\dots\dots(4.229)$$

donde:

$$f_Q = \sqrt{((\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJQ})^2 + (\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJQ})^2 - (\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJQ})(\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJQ}) + 3 \cdot (\tau_{xJ} + \Delta\tau_{xJQ})^2)} - \sigma_e > 0$$

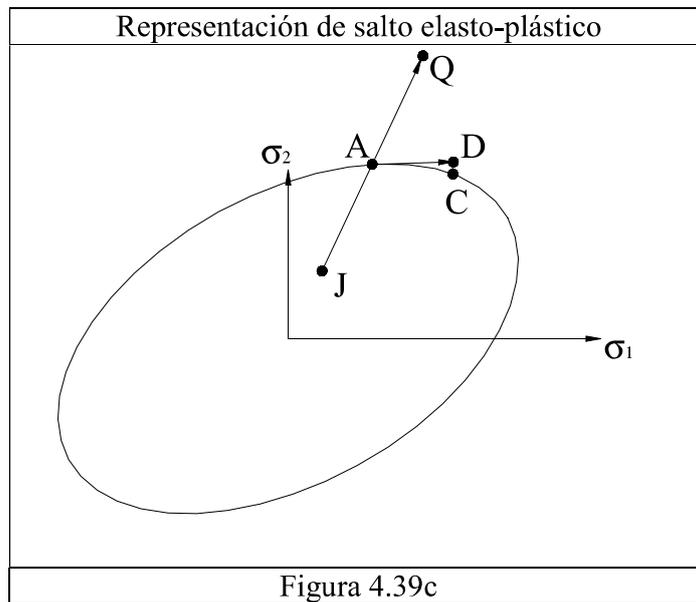
El punto A se obtiene escalando por μ el incremento de tensiones $\Delta\sigma_{JQ}$.

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix}_{JA} = \mu \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix}_{JQ} \dots\dots\dots(4.230)$$

y obligando a que el punto A se encuentre en la superficie de fluencia:

$$f_A = \sqrt{\left(\sigma_{xJ} + \mu \cdot \Delta\sigma_{xJQ}\right)^2 + \left(\sigma_{yJ} + \mu \cdot \Delta\sigma_{yJQ}\right)^2 - \left(\sigma_{xJ} + \mu \cdot \Delta\sigma_{xJQ}\right)\left(\sigma_{yJ} + \mu \cdot \Delta\sigma_{yJQ}\right) + 3 \cdot \left(\tau_{xJ} + \mu \cdot \Delta\tau_{xJQ}\right)^2} - \sigma_e = 0$$

El cálculo de μ es análogo al de ξ que se muestra más adelante.



El incremento de tensiones del tramo plástico se obtiene realizando la integral:

$$\Delta\sigma_{AC} = \int_{\epsilon_A}^{\epsilon_C} \mathbf{C}_{ep} \cdot d\epsilon \dots\dots\dots(4.231)$$

donde $\epsilon_A = \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_A$; $\epsilon_C = \epsilon_A + \Delta\epsilon_{AC}$

Para incrementos pequeños, la expresión anterior se puede sustituir por:

$$\Delta\sigma_{AC} \approx \Delta\sigma_{AD} = \mathbf{C}_{epA} \cdot \Delta\epsilon_{AD} = \mathbf{C}_{epA} \cdot (1 - \mu) \Delta\epsilon_{JQ} \dots\dots\dots(4.232)$$

Si identificamos el punto D con el C, se comete un error pequeño que nos aleja de la superficie de fluencia.

$$\Delta f = \sqrt{\left(\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJA} + \Delta\sigma_{xAD}\right)^2 + \left(\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJA} + \Delta\sigma_{yAD}\right)^2 - \left(\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJA} + \Delta\sigma_{xAD}\right)\left(\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJA} + \Delta\sigma_{yAD}\right) + 3 \cdot \left(\tau_{xJ} + \Delta\tau_{xJA} + \Delta\tau_{xAD}\right)^2} - \sigma_e \neq 0 \dots\dots\dots(4.233)$$

Para regresar a la superficie de fluencia, modificamos las tensiones de modo que sólo se provocan deformaciones plásticas, es decir, nos movemos en la dirección normal a la superficie de fluencia. Sea (σ_C, τ_C) la tensión incógnita, se obtiene como intersección de la curva de fluencia:

$$f = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2)} - \sigma_e \dots \dots \dots (4.234)$$

y la recta normal (escrita de forma paramétrica) a dicha superficie que pasa por D:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xD} \\ \sigma_{yD} \\ \tau_{xyD} \end{Bmatrix} + \xi \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xD} \\ \sigma_{yD} \\ \tau_{xyD} \end{Bmatrix} + \frac{\xi}{2 \cdot \sqrt{(\sigma_{xD}^2 + \sigma_{yD}^2 - \sigma_{xD} \cdot \sigma_{yD} + 3 \cdot \tau_{xyD}^2)}} \begin{pmatrix} 2 \cdot \sigma_{xD} - \sigma_{yD} \\ 2 \cdot \sigma_{yD} - \sigma_{xD} \\ 6 \cdot \tau_{xyD} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4.235)$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación anterior resulta una ecuación de segundo grado de donde se puede despejar el valor de ξ .

$$a \cdot \xi^2 + b \cdot \xi + c = 0, \text{ por tanto } \xi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

donde:

$$a = \frac{7 \cdot (\sigma_{xD}^2 + \sigma_{yD}^2) - 13 \cdot \sigma_{xD} \cdot \sigma_{yD} + 108 \cdot \tau_{xy}^2}{4 \cdot \sigma_{effD}^2}; \quad b = \frac{5 \cdot (\sigma_{xD}^2 + \sigma_{yD}^2) - 8 \cdot \sigma_{xD} \cdot \sigma_{yD} + 36 \cdot \tau_{xy}^2}{2 \cdot \sigma_{effD}}$$

$$c = \sigma_{effD}^2 - \sigma_e^2 \dots \dots \dots (4.236)$$

y se desecha la solución más alejada del punto D.

c) Salto plástico

Condiciones:

$$f_J = \sqrt{(\sigma_{xJ}^2 + \sigma_{yJ}^2 - \sigma_{xJ} \cdot \sigma_{yJ} + 3 \cdot \tau_{xyJ}^2)} - \sigma_e = 0$$

$$f_C = \sqrt{((\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJC})^2 + (\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJC})^2 - (\sigma_{xJ} + \Delta\sigma_{xJC})(\sigma_{yJ} + \Delta\sigma_{yJC}) + 3 \cdot (\tau_{xJ} + \Delta\tau_{xJC})^2)} - \sigma_e = 0 \dots \dots \dots (4.237)$$

Cálculos: se realiza de una forma similar a lo expuesto a partir del punto A en el caso anterior.

Las fuerzas internas equivalentes se obtienen aplicando el principio de los trabajos virtuales:

$$\delta W_{int} = \iiint_V \left\{ \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \delta \epsilon_x \\ \delta \epsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} dV \dots\dots\dots(4.238)$$

El vector $\{\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \gamma_{xy}\}$ se determina aplicando el siguiente proceso:
 Las deformaciones $\{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$ son:

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & -z \cdot \frac{d^2}{dx^2} \\ 0 & \frac{d}{dy} & -z \cdot \frac{d^2}{dy^2} \\ \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} & -2 \cdot z \cdot \frac{d^2}{dxdy} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(4.239)$$

Los desplazamientos en función de los movimientos de deformación pura $\{\mathbf{d}_D\} = \{\theta_{x1}, \theta_{y1}, u_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, u_3, v_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}\}$ vienen dados por:

$$\left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ N_4 & N_5 & 0 & N_6 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & N_9 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ u_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(4.240)$$

Las funciones de forma son las indicadas en el capítulo 3 asociado a los grados de libertad considerados. Resultando la expresión de $[B]$ que relaciona $\{\epsilon\} = [B] \{\mathbf{d}_D\}$

$$\begin{bmatrix} -z \cdot N_4^{''x} & -z \cdot N_5^{''x} & N_1^{'x} & -z \cdot N_6^{''x} & -z \cdot N_7^{''x} & N_2^{'x} & 0 & -z \cdot N_8^{''x} & -z \cdot N_9^{''x} \\ -z \cdot N_4^{''y} & -z \cdot N_5^{''y} & 0 & -z \cdot N_6^{''y} & -z \cdot N_7^{''y} & 0 & N_2^{'y} & -z \cdot N_8^{''y} & -z \cdot N_9^{''y} \\ -2 \cdot z \cdot N_4^{''xy} & -2 \cdot z \cdot N_5^{''xy} & N_1^{'x} + N_1^{'y} & -2z \cdot N_6^{''xy} & -2z \cdot N_7^{''xy} & N_2^{'x} + N_2^{'y} & N_2^{'x} + N_2^{'y} & -2z \cdot N_8^{''xy} & -2z \cdot N_9^{''xy} \end{bmatrix}$$

siendo, por tanto, la relación entre deformaciones y desplazamientos virtuales:

$$\{\delta \epsilon\} = [B] \{\delta \mathbf{d}_D\} \dots\dots\dots(4.241)$$

y sustituyendo en el PTV (ecuación 4.238) obtenemos las fuerzas internas asociadas a cada grado de libertad $\{M_{x1}, M_{y1}, f_{x2}, M_{x2}, M_{y2}, f_{x3}, f_{y3}, M_{x3}, M_{y3}\}$

$$\iiint_V \left\{ \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \delta \epsilon_x \\ \delta \epsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} dV = Mx_1 \cdot \delta \theta_{x_1} + My_1 \cdot \delta \theta_{y_1} + fx_2 \cdot \delta u_2 + Mx_2 \cdot \delta \theta_{x_2} + My_2 \cdot \delta \theta_{y_2} + fx_3 \cdot \delta u_3 + fy_3 \cdot \delta v_3 + Mx_3 \cdot \delta \theta_{x_3} + My_3 \cdot \delta \theta_{y_3} \quad (4.242)$$

$$Mx_1 = \iiint (-z \cdot \sigma_x \cdot N_4^{''x} - z \cdot \sigma_y \cdot N_4^{''y} - 2 \cdot z \cdot \tau_{xy} \cdot N_4^{''xy}) dV \quad (4.243)$$

$$My_1 = \iiint (-z \cdot \sigma_x \cdot N_5^{''x} - z \cdot \sigma_y \cdot N_5^{''y} - 2 \cdot z \cdot \tau_{xy} \cdot N_5^{''xy}) dV \quad (4.244)$$

$$fx_2 = \iiint (\sigma_x \cdot N_1^{''x} + \tau_{xy} \cdot (N_1^{''y} + N_1^{''x})) dV \quad (4.245)$$

$$Mx_2 = \iiint (-z \cdot \sigma_x \cdot N_6^{''x} - z \cdot \sigma_y \cdot N_6^{''y} - 2 \cdot z \cdot \tau_{xy} \cdot N_6^{''xy}) dV \quad (4.246)$$

$$My_2 = \iiint (-z \cdot \sigma_x \cdot N_7^{''x} - z \cdot \sigma_y \cdot N_7^{''y} - 2 \cdot z \cdot \tau_{xy} \cdot N_7^{''xy}) dV \quad (4.247)$$

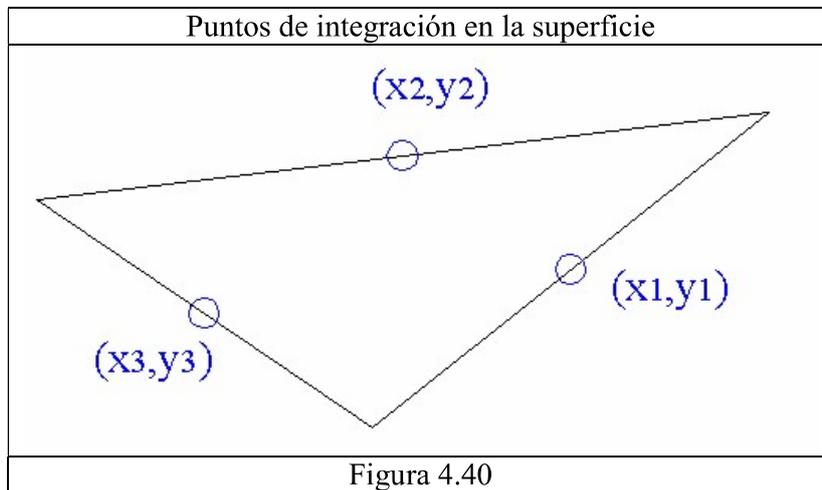
$$fx_3 = \iiint (\sigma_x \cdot N_2^{''x} + \tau_{xy} \cdot (N_2^{''y} + N_2^{''x})) dV \quad (4.248)$$

$$fy_3 = \iiint (\sigma_y \cdot N_2^{''y} + \tau_{xy} \cdot (N_2^{''y} + N_2^{''x})) dV \quad (4.249)$$

$$Mx_3 = \iiint (-z \cdot \sigma_x \cdot N_8^{''x} - z \cdot \sigma_y \cdot N_8^{''y} - 2 \cdot z \cdot \tau_{xy} \cdot N_8^{''xy}) dV \quad (4.250)$$

$$My_3 = \iiint (-z \cdot \sigma_x \cdot N_9^{''x} - z \cdot \sigma_y \cdot N_9^{''y} - 2 \cdot z \cdot \tau_{xy} \cdot N_9^{''xy}) dV \quad (4.251)$$

Estas integrales se hacen de forma numérica utilizando 3 puntos de integración sobre la superficie de coordenadas naturales (ver Anexo 1) (0.5, 0.5, 0), (0, 0.5, 0.5), (0.5, 0, 0.5) y 'n' en el espesor, cada capa tendrá un espesor e_i y el valor en cada capa se tomará en el punto medio.



$$\iiint f(x, y, z) dV = \frac{A}{3} \left[\int f(x_1, y_1, z) dz + \int f(x_2, y_2, z) dz + \int f(x_3, y_3, z) dz \right] = \frac{A}{3} \left(\sum_{i=1}^n f(x_1, y_1, z_i) e_i + \sum_{j=1}^n f(x_2, y_2, z_j) e_j + \sum_{k=1}^n f(x_3, y_3, z_k) e_k \right) \quad (4.252)$$

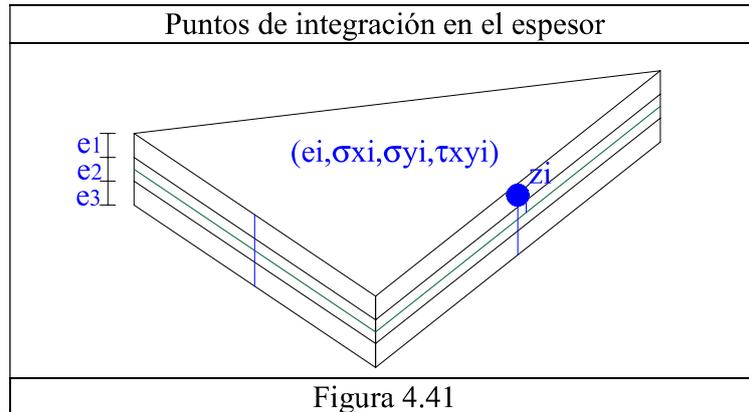


Figura 4.41

Para el cálculo de la matriz de rigidez, que nos relaciona diferenciales de fuerzas con diferenciales de movimientos, debemos derivar la expresión del PTV con respecto a los movimientos.

$$\iiint_V \left\{ \delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \gamma_{xy} \right\} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dV = \{\delta \mathbf{d}\}_{1 \times 9} \iiint_V [B]^T \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dV = \{\delta \mathbf{d}\}_{1 \times 9} \{\mathbf{f}_{int}\}_{9 \times 1} \dots (4.253)$$

$$[K] = \frac{d\mathbf{f}_{int}}{d\mathbf{d}} = \iiint_V [B]^T_{9 \times 3} \begin{pmatrix} \frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} & \frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_y} & \frac{d\sigma_x}{d\gamma_{xy}} \\ \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_x} & \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_y} & \frac{d\sigma_y}{d\gamma_{xy}} \\ \frac{d\tau_{xy}}{d\varepsilon_x} & \frac{d\tau_{xy}}{d\varepsilon_y} & \frac{d\tau_{xy}}{d\gamma_{xy}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} dV = \iiint_V [B]^T_{9 \times 3} \cdot (D)_{3 \times 3} \cdot [B]_{3 \times 9} dV \dots (4.254)$$

.....(4.254)
 donde [D] es la matriz tangente constitutiva cuyo valor será C ó Cep, según el punto se encuentre en comportamiento elástico (dentro de la superficie de fluencia) o elasto-plástico (sobre la superficie de fluencia).

En el anexo1 se ha deducido esta matriz admitiendo que el material presenta un comportamiento mecánico lineal.